

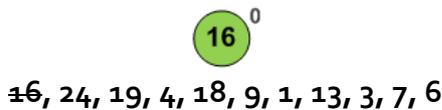
Tema: Árboles AVL y B

Apellido y Nombre: ..... Fecha:...../...../.....

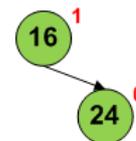
### EJEMPLOS

**Inserción en árboles AVL:** Dada la secuencia numérica 16, 24, 19, 4, 18, 9, 1, 13, 3, 7, 6 desarrolle gráficamente la inserción de los valores en un árbol AVL. Indique los casos de rebalanceo aplicados y el intercambio de punteros realizado.

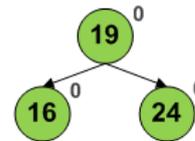
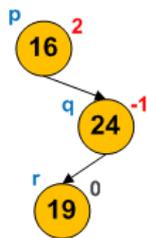
Al insertar elementos en un árbol AVL es necesario actualizar el balance de los nodos, tras cada inserción, para determinar si corresponde o no reorganizar su estructura, identificando el caso a aplicar cuando sea apropiado. Para ello, es preciso recordar que los valores de balance permitidos son -1, 0 y 1.



Al insertar el valor 16 se calcula su balance ( $h_d - h_i$ , diferencia de altura de los subárboles derecho e izquierdo). Balance=0

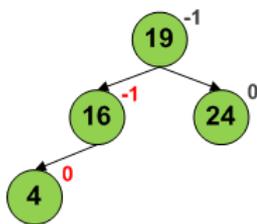


Tras insertar el valor 24 se presentan los balances 1 y 0 sobre una **rama derecha** del árbol. Esto indica que insertar un nodo sobre esta rama producirá un caso de rebalanceo (RR o RL).



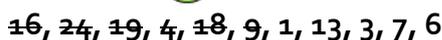
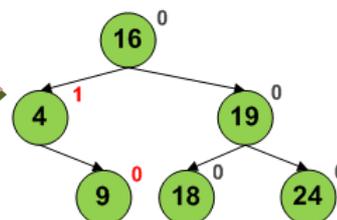
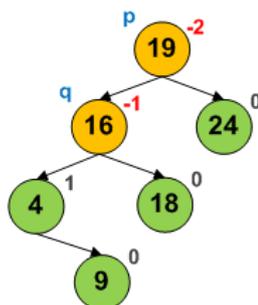
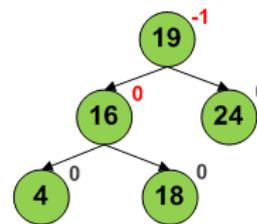
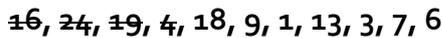
Al insertar el valor 19 se presentan valores de balance no permitidos. Si nos referimos al nodo 16 con el puntero  $p$  y al nodo 24 con el puntero  $q$ , la inserción a la derecha o izquierda de  $q$  determina el caso a aplicar. Ya que 19 se insertó a izquierda de  $q$ , se aplicará el caso **RL**, siendo necesario un puntero más ( $r$ ).

El nodo apuntado por  $r$  "adopta" a los nodos apuntados por  $p$  (izquierda) y  $q$  (derecha). Tras reorganizar los nodos, el árbol presenta valores de balance correctos.



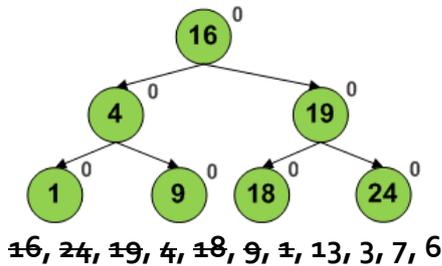
Al insertar el valor 4, se presentan los valores -1 y 0 sobre una **rama izquierda** del árbol. Esto indica que si se inserta un nodo sobre esta rama será necesario rebalancear el árbol.

Al insertar el valor 18 se presentan los balances -1 y 0 sobre una **rama izquierda** (nodos 19 y 16). Una inserción sobre esta rama producirá un caso de rebalanceo (LL o LR).

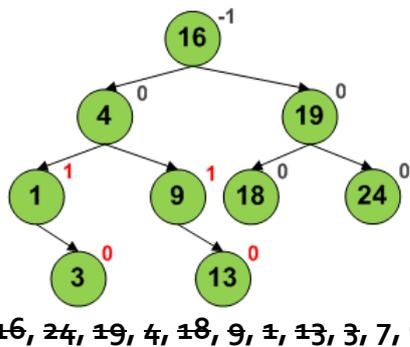


Al insertar el valor 9, se presentan valores incorrectos de balance sobre una rama izquierda (nodos 19 y 16). Si nos referimos al nodo 19 con el puntero *p* y al nodo 16 con el puntero *q*, la inserción a la derecha o izquierda de *q* determina el caso a aplicar. Ya que 9 se insertó a izquierda de *q*, se aplicará el caso *LL*.

**Importante:** *q* se toma como referencia para identificar el caso de rebalanceo.



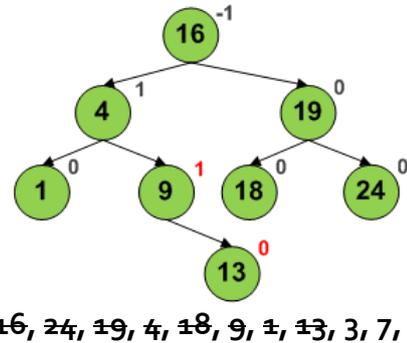
Al insertar el valor 1, se actualizan los balances del árbol y todos los valores de balance se mantienen correctos.



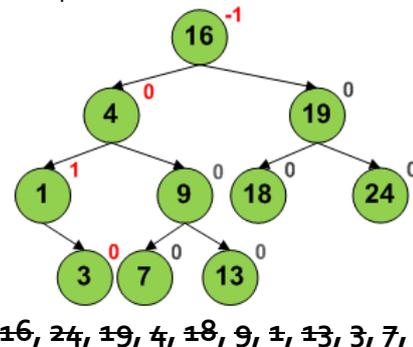
Al insertar el valor 3 y actualizar los valores de balance, se identifica una rama derecha (nodos 1 y 3) en la que una inserción puede producir un caso de rebalanceo (RR o RL).

El nodo 16 "adopta" por derecha al nodo 19, y éste a su vez "adopta" por la izquierda al nodo 18 (antes hijo de 16 por derecha).

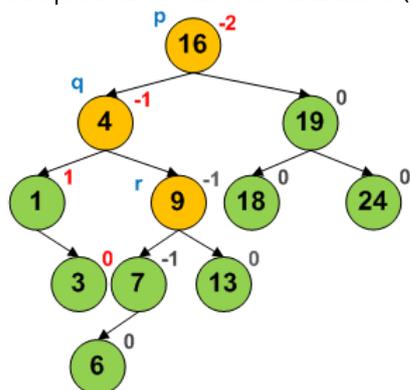
Al reorganizar los nodos del árbol sólo se presentan valores permitidos de balance. No obstante, una rama derecha (nodos 4 y 9) presenta balances 1 y 0, por lo que insertar sobre esta rama implicará rebalancear el árbol (RR o RL).



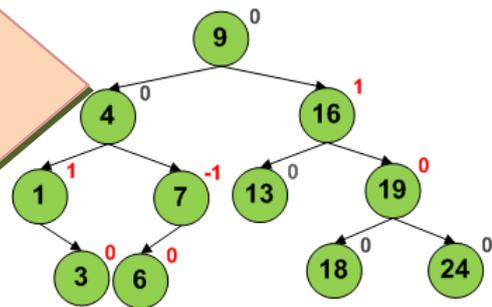
Al insertar el valor 13 y actualizar los valores de balance, se identifica una rama derecha (nodos 9 y 13) en la que una inserción puede producir un caso de rebalanceo (RR o RL).



Se inserta el nodo 7 y se actualizan los balances de árbol. Los nodos 16 y 4 presentan balance -1 y 0 lo que indican que una inserción sobre esta rama provocará un caso de rebalanceo.



Caso LR  
 p->izq=r->der;  
 q->der=r->izq;  
 r->izq=q;  
 r->der=p;  
 p=r;



16, 24, 19, 4, 18, 9, 1, 13, 3, 7, 6

Tras insertar el valor 6 y actualizar los balances se identifican valores no permitidos en una rama izquierda (nodos 16 y 4). Se asocia los punteros *p* y *q* a los nodos 16 y 4. El nodo 6 se insertó a derecha de *q* lo que implica aplicar el caso *LR*. Para ello, se adiciona un puntero *r* que refiere al nodo 9.

El nodo apuntado por *r* "adopta" a los nodos apuntados por *q* (izquierda) y *p* (derecha). Además, los nodos originalmente apuntados por izquierda y derecha de 9 son "adoptados" por los nodos *q* (derecha de *q*) y *p* (izquierda de *p*).

Tras reorganizar los nodos, los valores de balance son correctos. No obstante, quedan resaltadas las ramas en las que una inserción puede provocar la reorganización del árbol.

**Inserción en árboles B:** Dada la serie de números presentada a continuación, construya el correspondiente árbol B de orden 2, indicando los casos en que se produzca desborde.

24, 16, 41, 7, 13, 5, 36, 55, 72, 1, 9, 86, 93, 77, 8, 17, 11, 15

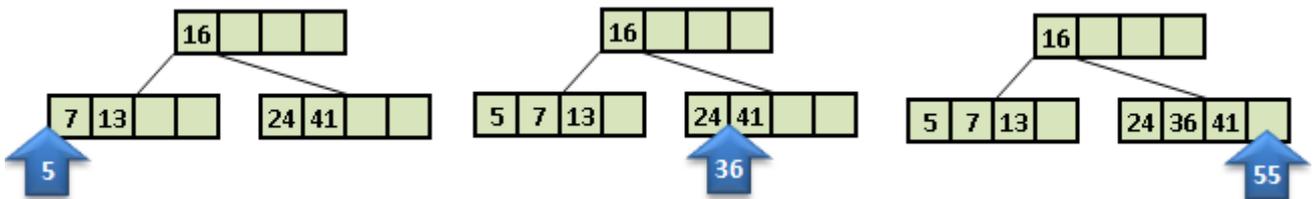
Al crear un árbol B, en primer término, debe considerarse cuál es su orden para así definir el tamaño de las páginas que lo conformarán. En este caso, un árbol B de orden 2 tendrá páginas de 4 elementos, por lo que cada página almacenará al menos 2 datos (salvo la raíz). Conforme se insertan los datos, éstos se ubican de forma ordenada en la página.



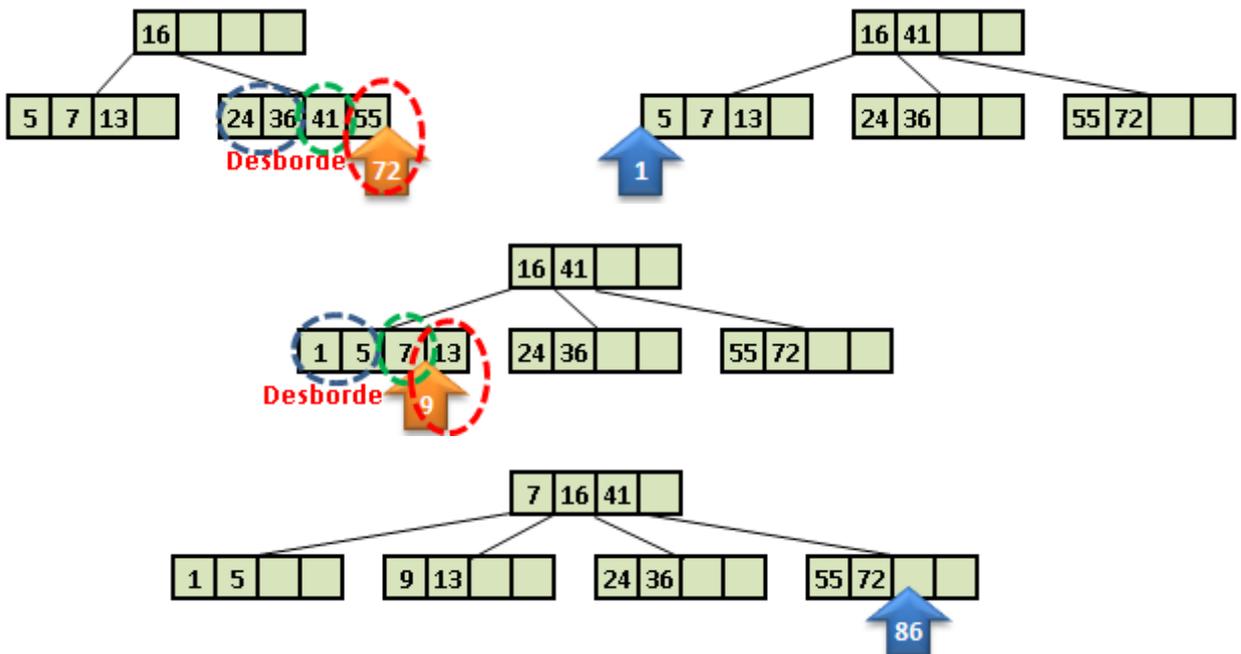
Cuando la cantidad de datos excede el tamaño de la página entonces se produce lo que se conoce como desborde de página (*overflow*). Esta situación se resuelve redistribuyendo los datos de la siguiente forma: tomando como referencia el dato central (ordenados), los valores menores que el central se ubican en una página, los mayores en otra y el valor central pasa al nivel inmediato superior del árbol (si no existe, se crea). De esta manera, como puede observarse, cada página contiene la cantidad mínima permitida de elementos.

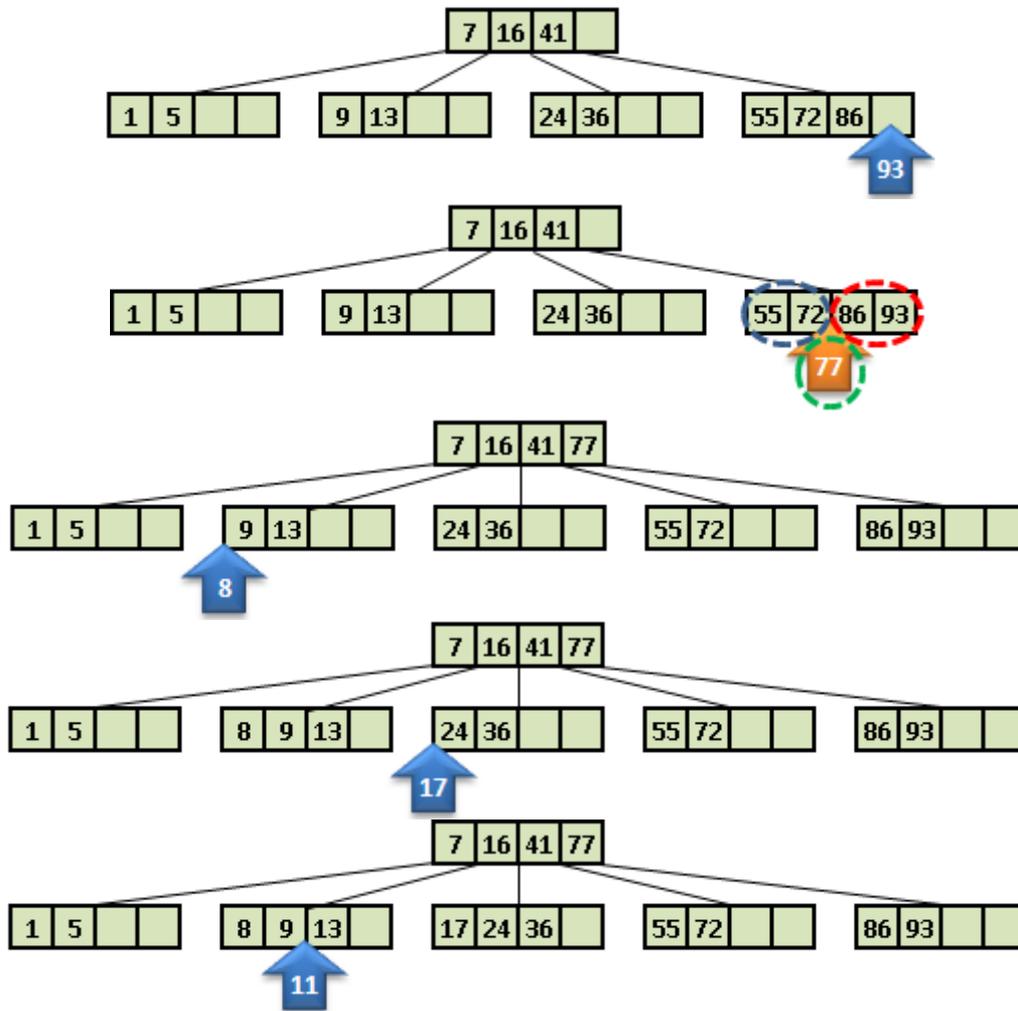


La inserción continúa recorriendo el árbol y ubicando los datos, de forma ordenada, en la página hoja correspondiente.

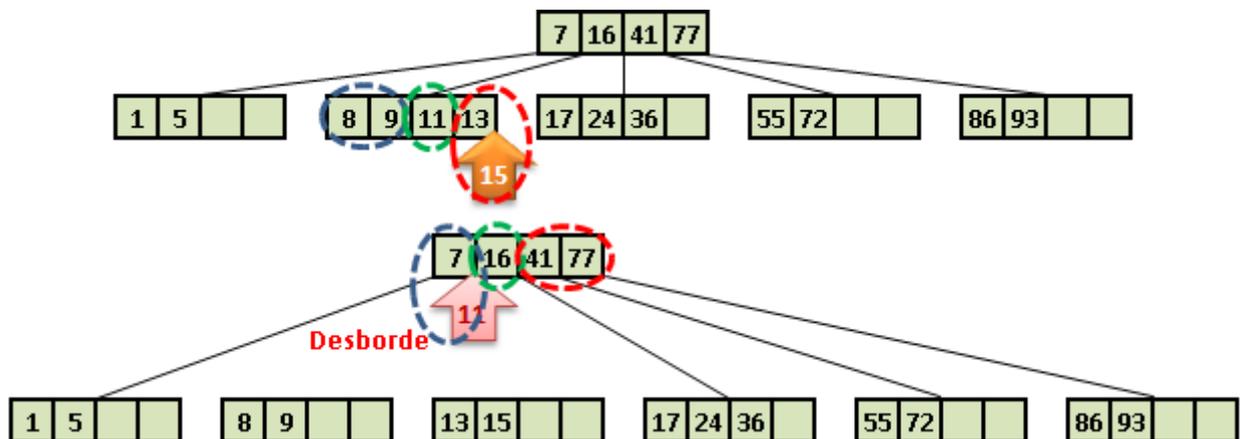


Durante la inserción pueden producirse varios desbordes de página que deberán resolverse aplicando la estrategia ya descrita. Por ejemplo, al insertar el valor 72 se produce un desborde que deriva en la redistribución de los elementos de la página desbordada: 24 y 36 se ubican en la página de valores menores que 41 (y mayores que 16); 55 y 72 se ubican en la página de valores mayores que 41; y 41 pasa al nivel inmediato superior. Algo similar ocurre al insertar los valores 9 y 77.

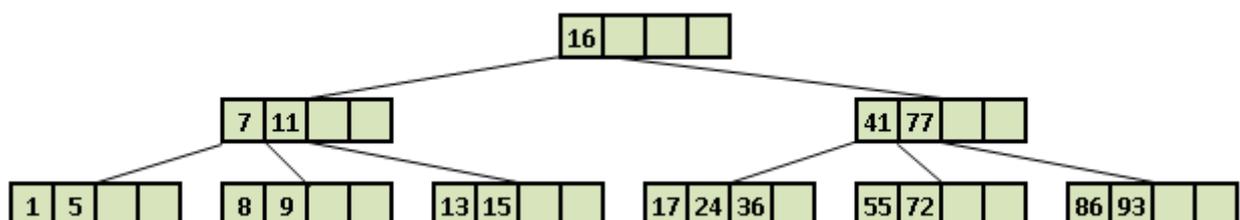




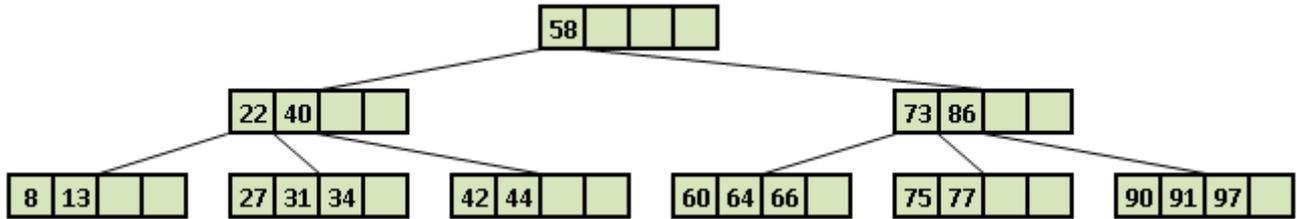
En particular, al insertar el valor 15 se produce un desborde que al resolverse genera a su vez el desborde de la página inmediata de nivel superior.



Este nuevo desborde se soluciona aplicando la misma estrategia (división de páginas y redistribución de datos). El árbol resultante tendrá 3 niveles (se creó un nuevo nivel al resolver el desborde de página).

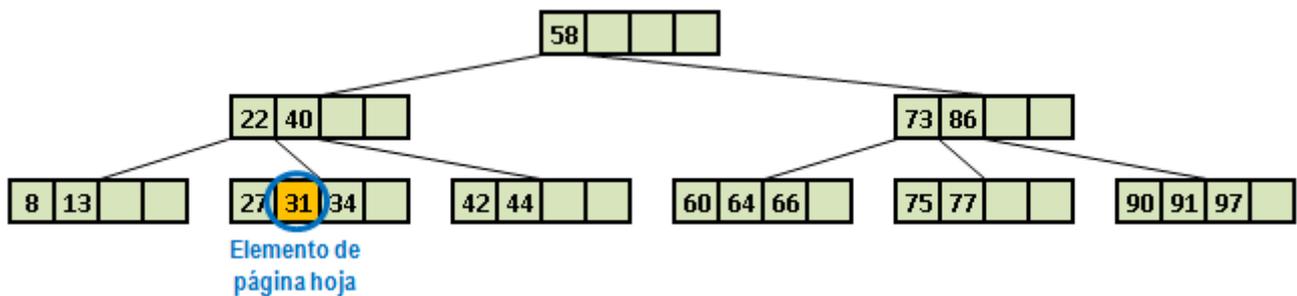


**Eliminación en árboles B:** Dado el siguiente árbol B, de orden 2, elimine los elementos 31, 58, 73 y 8 dibujando tras cada eliminación el árbol resultante (aplique cuando sea necesario el criterio MENOR DE MAYORES).

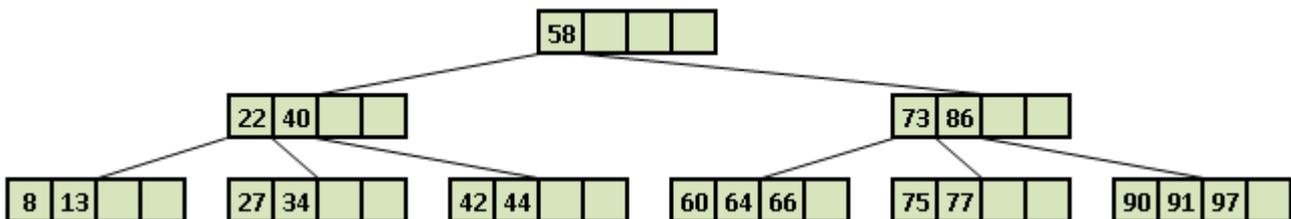


Al eliminar un elemento de un árbol B lo primero que debe identificarse es el caso de eliminación a aplicar: página hoja o página interior. Si el elemento pertenece a una página hoja la eliminación es directa. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que una página no puede quedar subocupada, por lo que esta situación debe resolverse en caso de producirse. No obstante, si el elemento a eliminar pertenece a una página interior entonces es necesario utilizar un criterio para elegir a su reemplazo (Mayor de Menores o Menor de Mayores).

Al eliminar el valor 31 nos encontramos con un elemento que pertenece a una página hoja, por lo que la eliminación es directa.



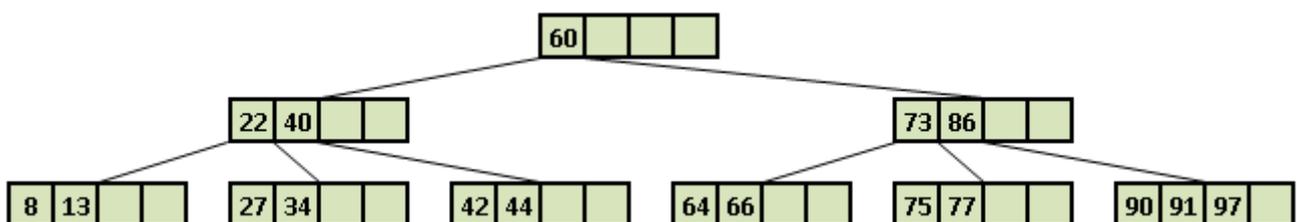
Además, es preciso verificar la ocupación de la página de modo que si contiene menos elementos que los permitidos se realicen las acciones apropiadas. La página en cuestión tiene 2 elementos, el mínimo permitido para árboles B de orden 2.



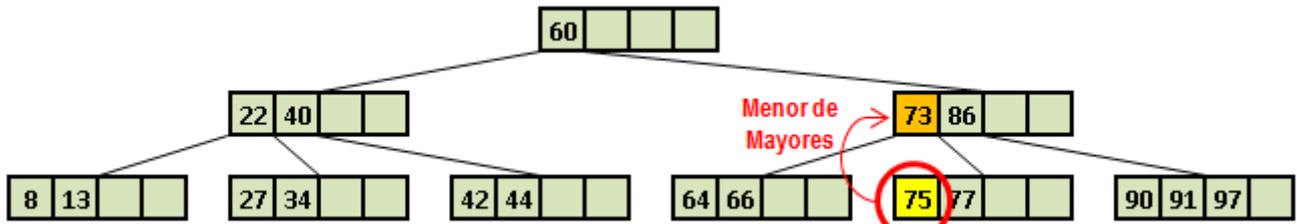
Al eliminar el valor 58 se presenta el caso de eliminación de una página interior, por lo que es necesario reemplazar este valor por otro del árbol. En el enunciado se indica aplicar el criterio Menor de Mayores, seleccionándose entonces el valor 60 como sustituto de 58 (de los valores mayores a 58, 60 es el menor).



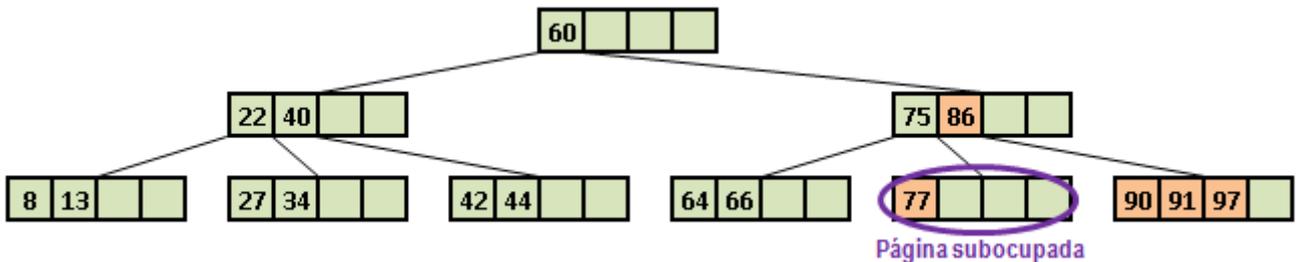
Al mover 60 de la página hoja en la que se encontraba debe verificarse la ocupación de dicha página. Dado que ésta contiene una cantidad válida de elementos el proceso finaliza allí.



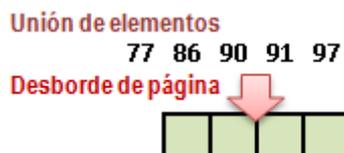
Para eliminar el valor 73, nuevamente, se aplica el caso de eliminación de una página interior. En esta oportunidad, el valor 75 reemplazará a 73 (criterio Menor de Mayores).



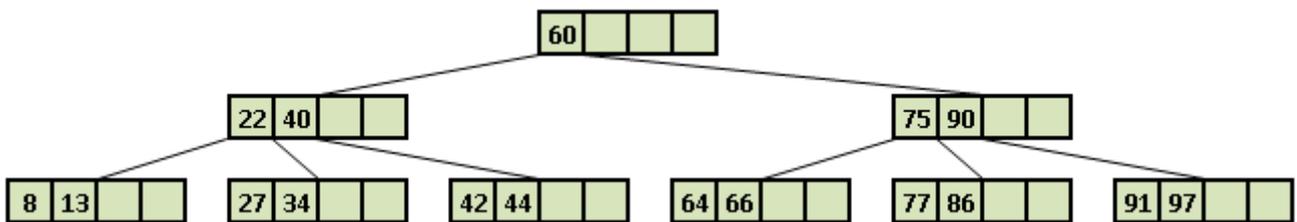
Al mover el valor 75 de la página hoja en la que se encuentra, ésta sólo contendrá un elemento quedando subocupada (página que tiene menos elementos que los permitidos).



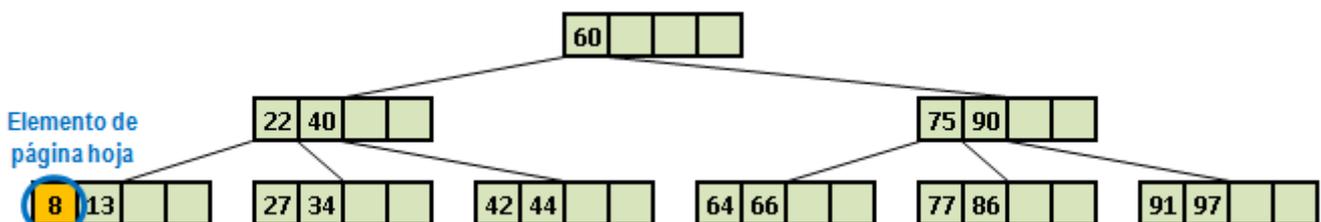
La subocupación se resuelve fusionando los elementos de la página subocupada con una página adyacente y la clave que las vincula. En este caso, se fusionarán 77 (página subocupada), 86 (clave), 90, 91, 97 (página adyacente).



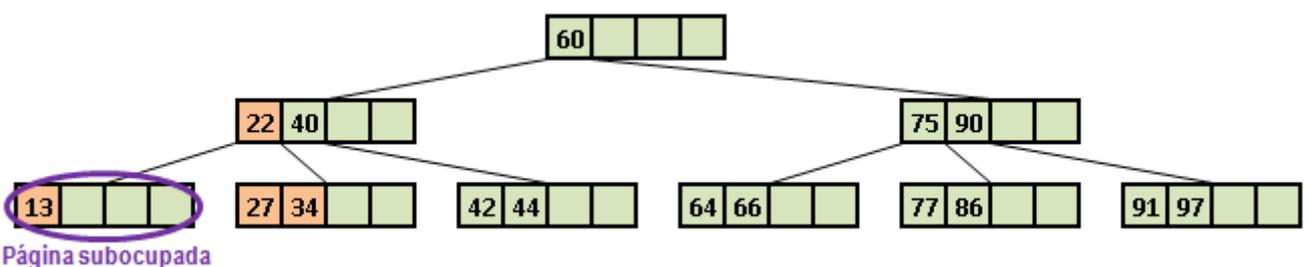
Nótese que la cantidad de elementos fusionados excede el tamaño de la página por lo que se procede de la misma manera que en el caso de la inserción cuando se presenta un desborde de página. Teniendo en cuenta esto, los elementos se distribuyen de la siguiente forma: 77 y 86 ocupan una página, 90 se ubica en la página inmediata de nivel superior, 91 y 97 ocupan otra página.



Para eliminar el valor 8 se aplica el caso de eliminación de una página hoja, es decir, eliminación directa.



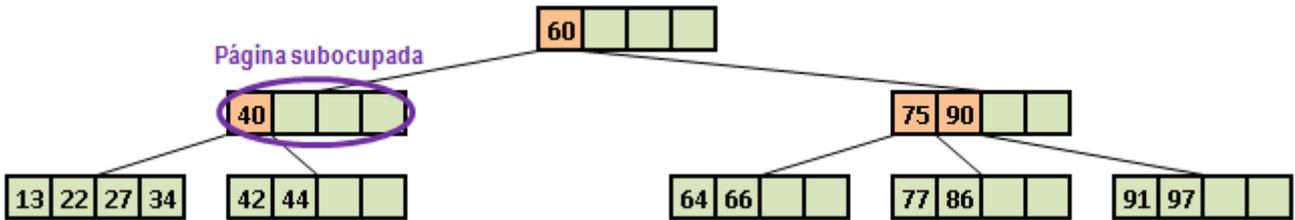
No obstante, esto genera una página subocupada y debe resolverse fusionando esta página con una adyacente y la clave que la vincula.



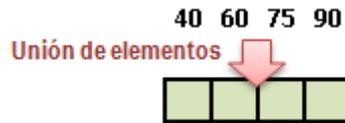
En este caso, los elementos fusionados (13, 22, 27 y 34) completan una página y no es necesario aplicar las acciones asociadas a un desborde.



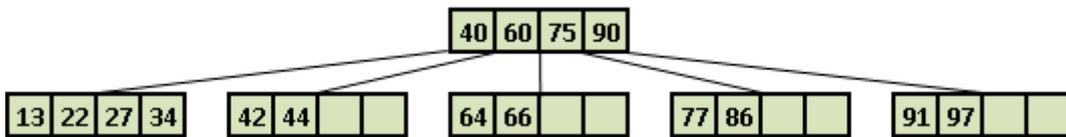
Sin embargo, la página de nivel superior de la que se extrajo la clave quedó subocupada. Esto se resuelve aplicando nuevamente las mismas acciones, es decir, fusionando la página subocupada con una página adyacente y la clave que las vincula.



Ahora se fusionan los elementos 40, 60, 75 y 90 que completan una página y no es necesario aplicar las acciones asociadas a un desborde.



Así, el árbol B resultante tendrá sólo 2 niveles.



**EJERCICIOS**

1) Dados los siguientes árboles binarios: a) indique, para cada nodo,  $h_d-h_i$  (diferencia de altura de los subárboles izquierdo y derecho de cada nodo) y b) determine si están balanceados o no

a)

b)

c)

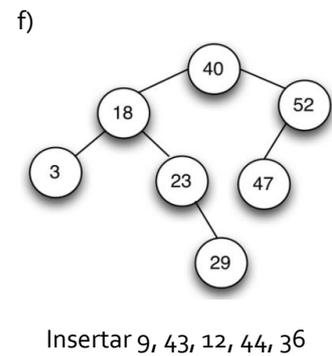
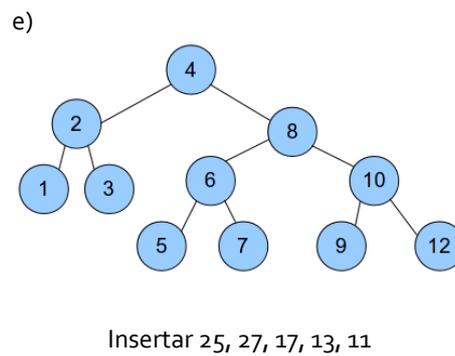
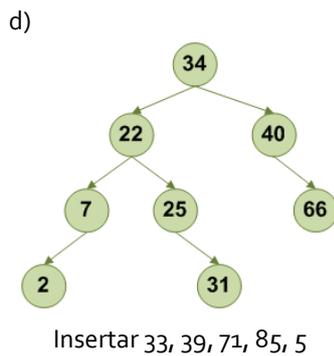
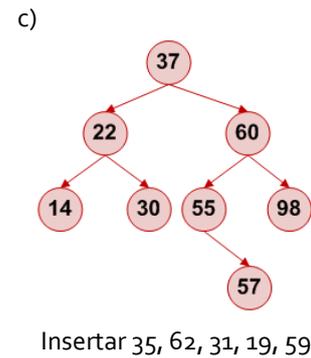
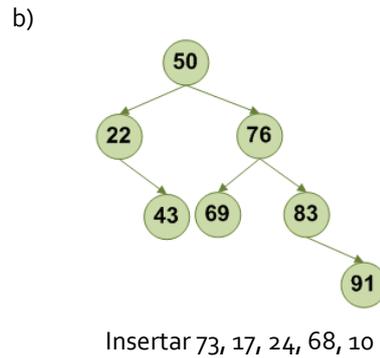
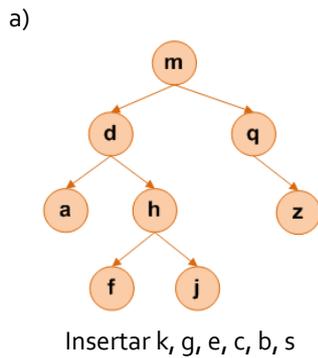
d)

e)

f)

g)

2) Dados los siguientes árboles AVL, inserte los valores que se indican realizando, cuando sea necesario, el rebalanceo apropiado. Identifique en cada caso el rebalanceo aplicado.



3) Para cada secuencia de datos presentada a continuación dibuje el correspondiente árbol binario de búsqueda. Luego, redibuje estos árboles considerando el criterio de equilibrio de los árboles AVL. ¿Qué diferencias nota entre ambas organizaciones de datos?

- a) 13, 28, 31, 36, 44
- b) 7, 12, 19, 23, 42
- c) 56, 21, 14, 11, 9
- d) 17, 40, 48, 25, 14, 29, 20, 19, 13, 11
- e) 25, 29, 31, 19, 22, 38, 19, 12, 14, 43, 33, 15, 49, 27, 48, 23

4) Dados los siguientes datos desarrolle gráficamente la inserción de éstos en árboles AVL. Indique los rebalanceos aplicados.

- a) 14, 16, 22, 21, 28
- b) 30, 34, 37, 42, 55, 31, 29
- c) 28, 30, 22, 29, 21, 39, 63, 61
- d) 12, 9, 5, 19, 21, 23, 16, 20, 18
- e) 17, 33, 14, 15, 20, 29, 28, 16, 29, 34
- f) 11, 15, 18, 22, 10, 2, 14, 19, 25, 13

5) Dada la siguiente secuencia de valores:

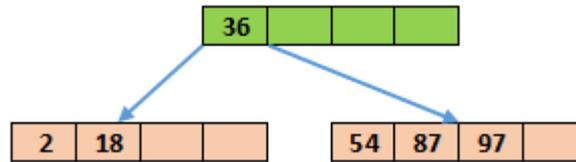
**21 44 13 16 35 51 15 60 34 27 20 31 17 21 33 26**

Construya el correspondiente árbol AVL, indicando en cada paso:

- a) El valor de los balances para cada nodo.
- b) El tipo de rebalanceo aplicado, si éste es necesario.
- c) El **intercambio de punteros** realizado (gráficamente) y el **CÓDIGO ASOCIADO**.

6) Dada la secuencia numérica **15, 23, 40, 10, 12, 17, 22, 29, 27** desarrolle gráficamente la inserción de estos valores en un árbol AVL. Indique, cuando corresponda, los casos de rebalanceo aplicados y el **intercambio de punteros** realizado.

- 7) Dada la secuencia numérica **15, 28, 22, 29, 33, 18, 30, 17, 13** desarrolle gráficamente la inserción de estos valores en un árbol AVL. Indique, cuando corresponda, los casos de rebalanceo aplicados y el **intercambio de punteros** realizado.
- 8) Dada la secuencia numérica **14, 41, 25, 24, 29, 11, 22** desarrolle gráficamente la inserción de los valores en un árbol AVL. Indique los casos de rebalanceo aplicados y el **intercambio de punteros** realizado.
- 9) Dada la secuencia numérica **14, 16, 21, 27, 25, 37, 41, 34, 22, 17** desarrolle gráficamente la inserción de estos valores en un árbol AVL. Indique, cuando corresponda, los casos de rebalanceo aplicados y el **intercambio de punteros** realizado.
- 10) Dado el siguiente árbol B, de orden 2, desarrolle (gráficamente) la inserción de los siguientes elementos **56, 33, 53, 93, 30, 3, 26, 50, 32, 88, 64**



- 11) Dada la serie de números presentada a continuación, construya el correspondiente árbol B de **orden 3**, indicando los casos en que se produzca desborde.

**6 44 76 36 63 40 48 42 92 8 13 80 74 41 64 97 4 22 16 11 27 49 18 39 91**

- 12) Dada la serie de números presentada a continuación, construya el correspondiente árbol B de **orden 2**, indicando los casos en que se produzca desborde.

**6 44 76 36 63 40 48 42 92 8 13 80 74 41 64 97 4 31 17 61**

- 13) Dada la serie de números presentada a continuación, construya el correspondiente árbol B de **orden 3**, indicando los casos en que se produzca desborde.

**12 20 4 54 56 38 55 81 88 84 82 16 69 5 77 26 6 21 37 13 33 41 10 60 18**

- 14) Dada la siguiente secuencia de valores realice la inserción (paso a paso) de los elementos en un Árbol B de **orden 2**.

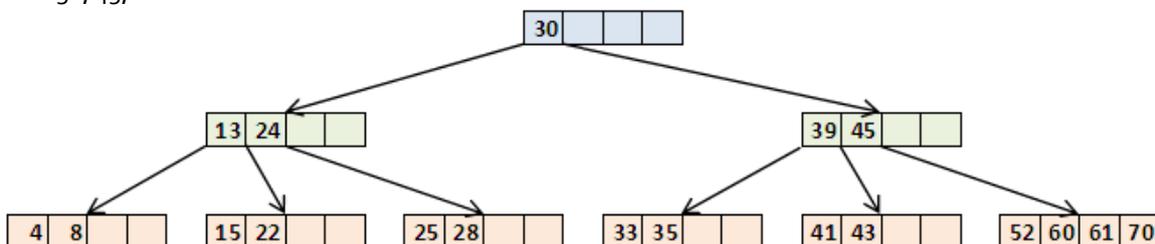
**14 7 46 11 67 18 90 44 26 60 49 95 12 28 53 65 50 22 16 1 41**

- 15) Dada la siguiente secuencia de valores realice la inserción (paso a paso) de los valores en un Árbol B de **orden 3**.

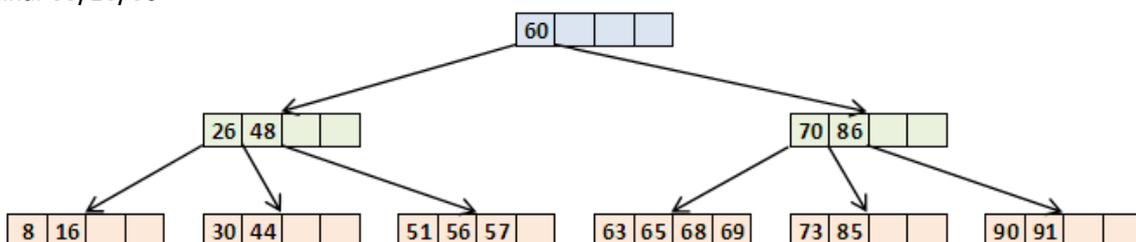
**18 7 95 8 9 52 11 82 78 60 10 61 14 69 70 1 65 22 16 5 48 50 12 73 15**

- 16) Dados los siguientes árboles B, de **orden n**, desarrolle gráficamente la eliminación de los elementos especificados aplicando, cuando sea necesario, el criterio **MAYOR DE MENORES**. Tras cada eliminación dibuje el árbol resultante.

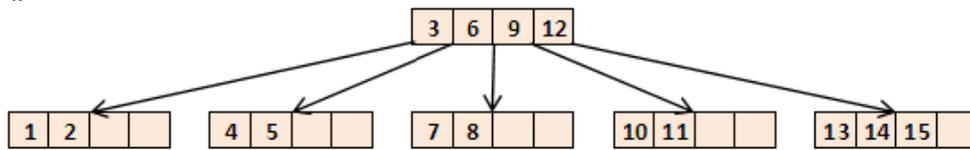
a) Eliminar 30, 45, 28



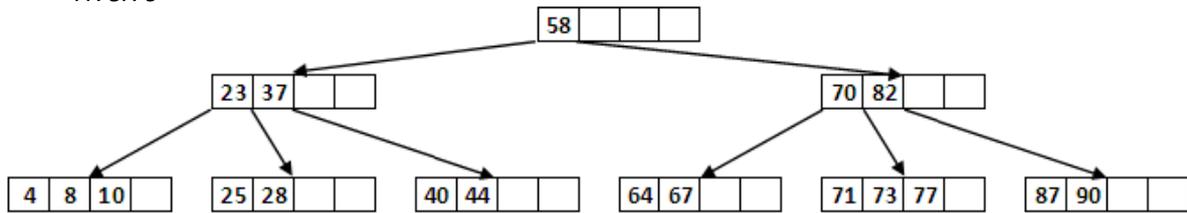
b) Eliminar 68, 26, 60



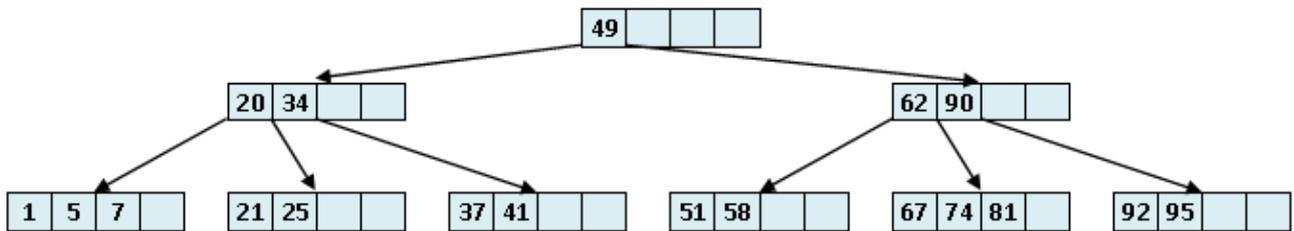
c) Eliminar 9, 14, 1



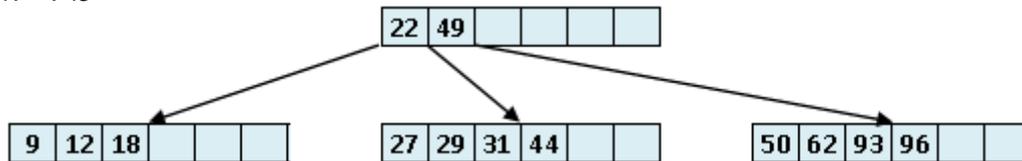
d) Eliminar 77, 37, 90



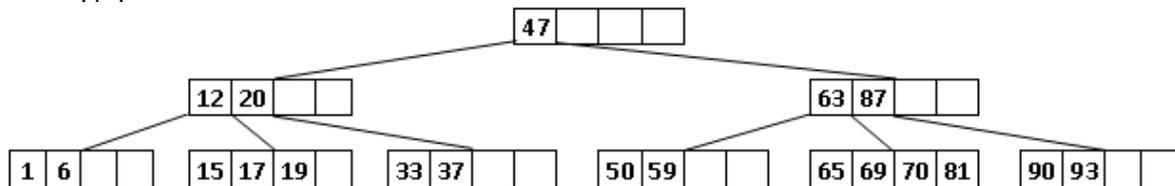
e) Eliminar 49, 5, 51



f) Eliminar 27, 12, 49

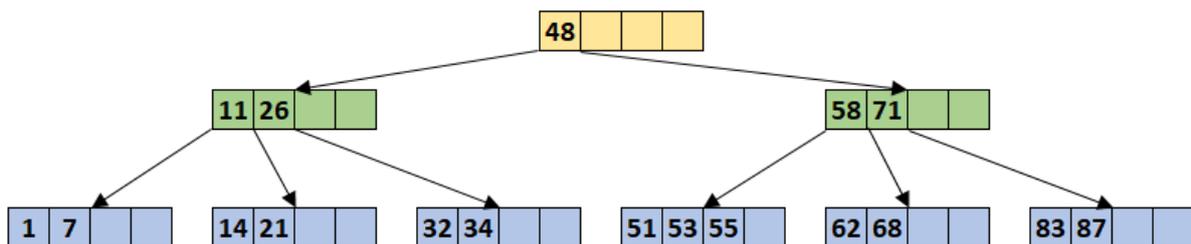


g) Eliminar 6, 70, 12

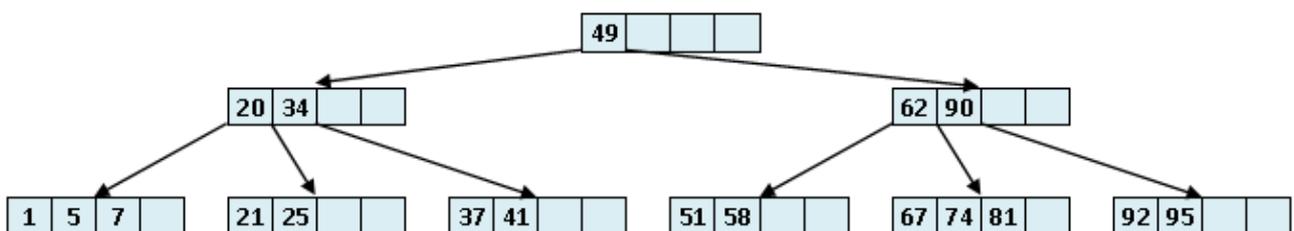


17) Dados los siguientes árboles B, de orden  $n$ , desarrolle gráficamente la eliminación de los elementos especificados aplicando, cuando sea necesario, el criterio **MENOR DE MAYORES**. Tras cada eliminación dibuje el árbol resultante.

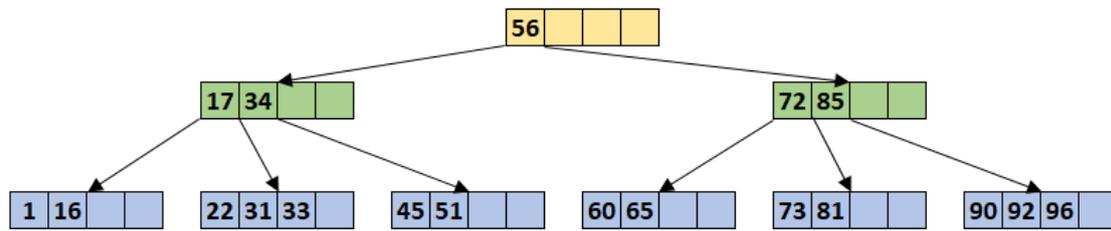
a) Eliminar 21, 1, 71



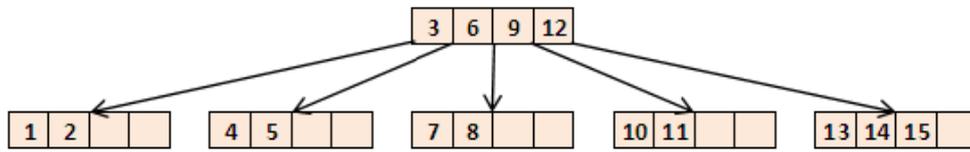
b) Eliminar 95, 25, 49



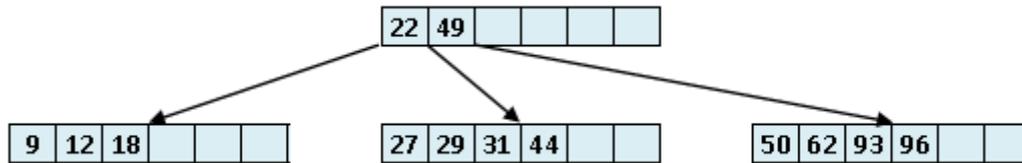
c) Eliminar 96, 51, 34



d) Eliminar 1, 7, 11



e) Eliminar 49, 27, 22



f) Eliminar 13, 35, 30

