

# **Estructura de Datos**

## **UNIDAD VI: INTRODUCCIÓN A ÁRBOLES**

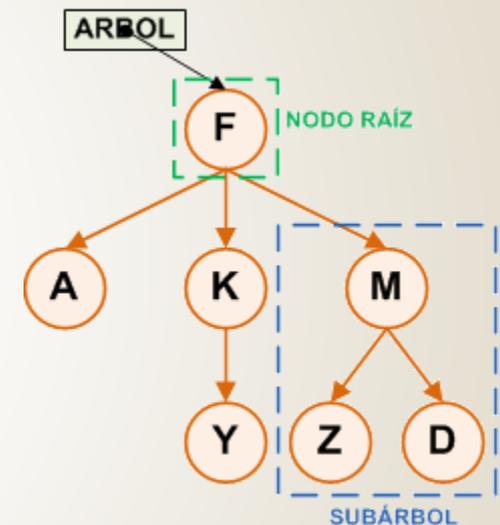


# Índice

- Conceptos básicos
- Árboles Binarios
- Árboles Binarios de Búsqueda
- Operaciones: recorrido, búsqueda, inserción y eliminación
- Aplicaciones

# Conceptos Básicos (1)

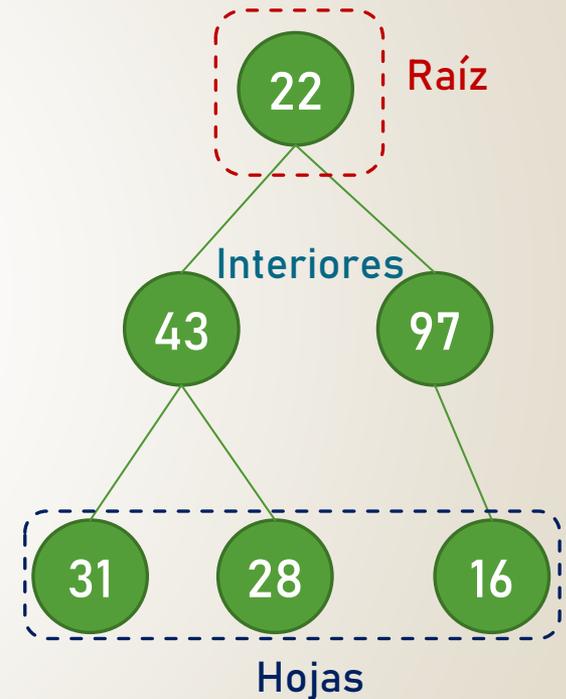
- Un TDA árbol es un conjunto finito de nodos, dónde cada nodo está formado por  $n$  enlaces (árbol de grado  $n$ ), tal que:
  1. existe un nodo especial llamado *RAIZ*
  2. existen  $n > 0$  subconjuntos de nodos llamados subárboles.
- Un árbol se dice vacío si no tiene nodos.



Árbol de grado 3

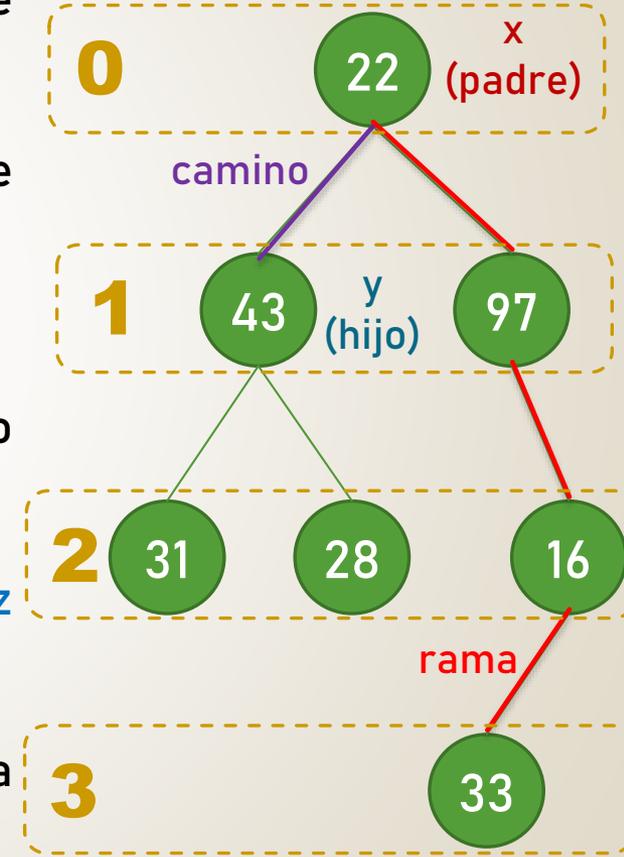
## Conceptos Básicos (2)

- Nodos o vértices: se trata de registros compuestos por un campo de datos y  $n$  punteros o enlaces.
- Aristas o arcos: enlaces que conectan los nodos.
- Raíz: es el primer nodo del árbol, a partir de éste descienden todos los demás.
- Nodos terminales u hojas: son los nodos que no tienen descendientes.
- Nodos interiores: son los nodos que tienen al menos un subárbol.



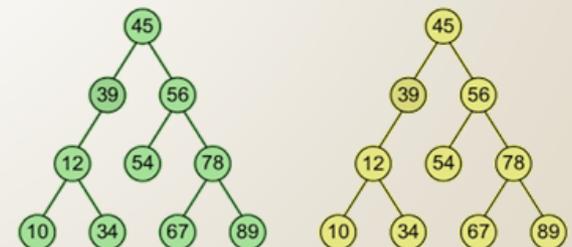
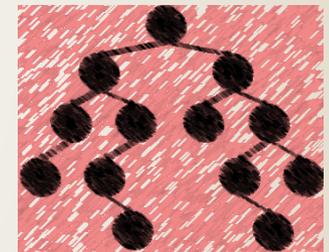
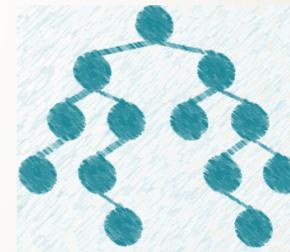
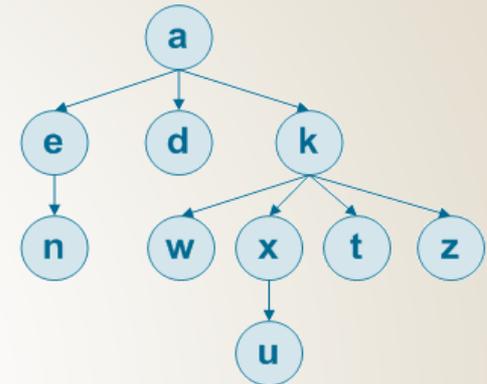
## Conceptos Básicos (3)

- Ascendiente: un nodo  $x$  es ascendiente (**padre**) de un nodo  $y$ , si  $x$  tiene un puntero al nodo  $y$ .
- Descendiente: un nodo  $b$  es descendiente (**hijo**) de un nodo  $a$ , si  $b$  es apuntado por el nodo  $a$ .
- Camino: conjunto de enlaces entre 2 nodos.
- Rama: **camino** existente entre la **raíz** y un nodo **hoja**.
- Nivel de un nodo: cantidad de aristas entre la **raíz** y un **nodo específico**.
- Altura o profundidad: cantidad de nodos de la **rama más larga** (máximo nivel más 1).

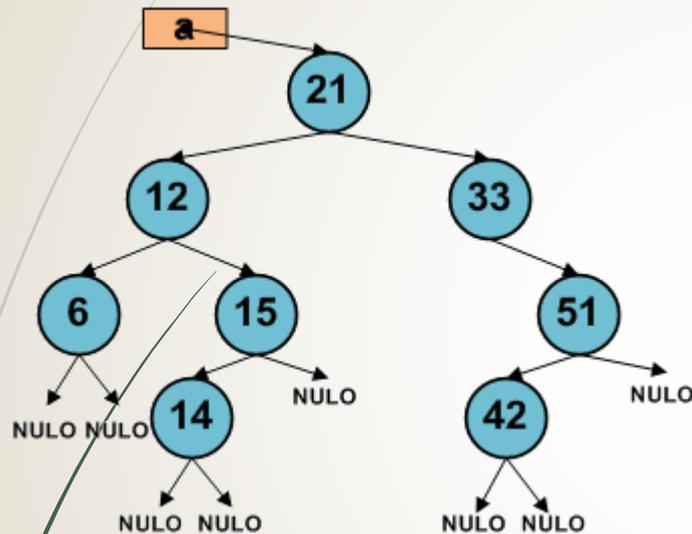


# Conceptos Básicos (4)

- Peso del árbol: cantidad de nodos **hojas** del árbol.
- Grado de un árbol: máximo N° de **descendientes** de un nodo.
- Árbol similar: árboles con la **misma estructura**.
- Árbol equivalente: árboles con la **misma estructura y datos**.



# Conceptos Básicos (5)



Raíz: 21

Hojas: 6,14,42

Nodos interiores: 12,15,33,51

Nivel de nodo 51: 2

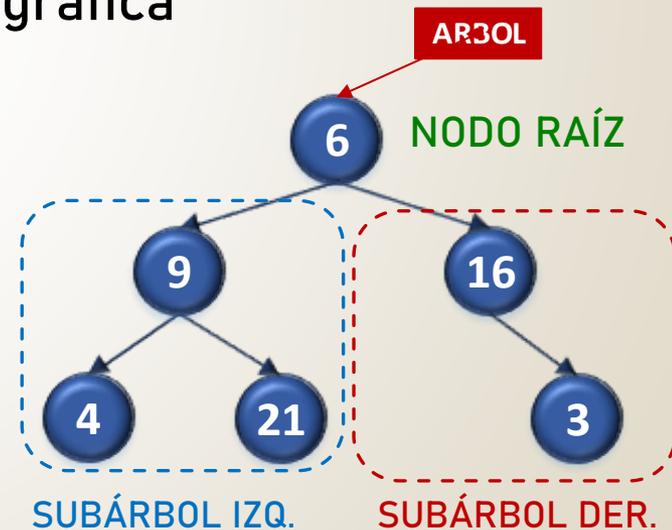
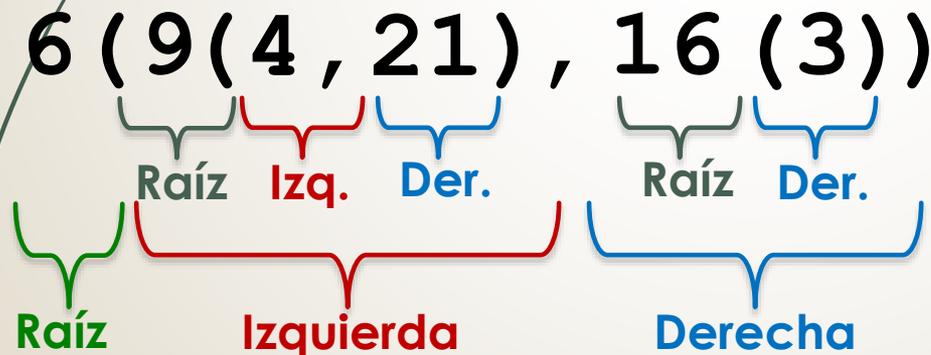
Altura: 4

Peso: 3

Grado: 2

# Árboles Binarios (1)

- Un árbol binario es un árbol de grado 2 tal que:
  1. existe un nodo llamado nodo **RAÍZ**
  2. cada nodo del árbol tiene como máximo **2 descendientes** (subárbol izquierdo y subárbol derecho)
- Representación: paréntesis anidados y gráfica



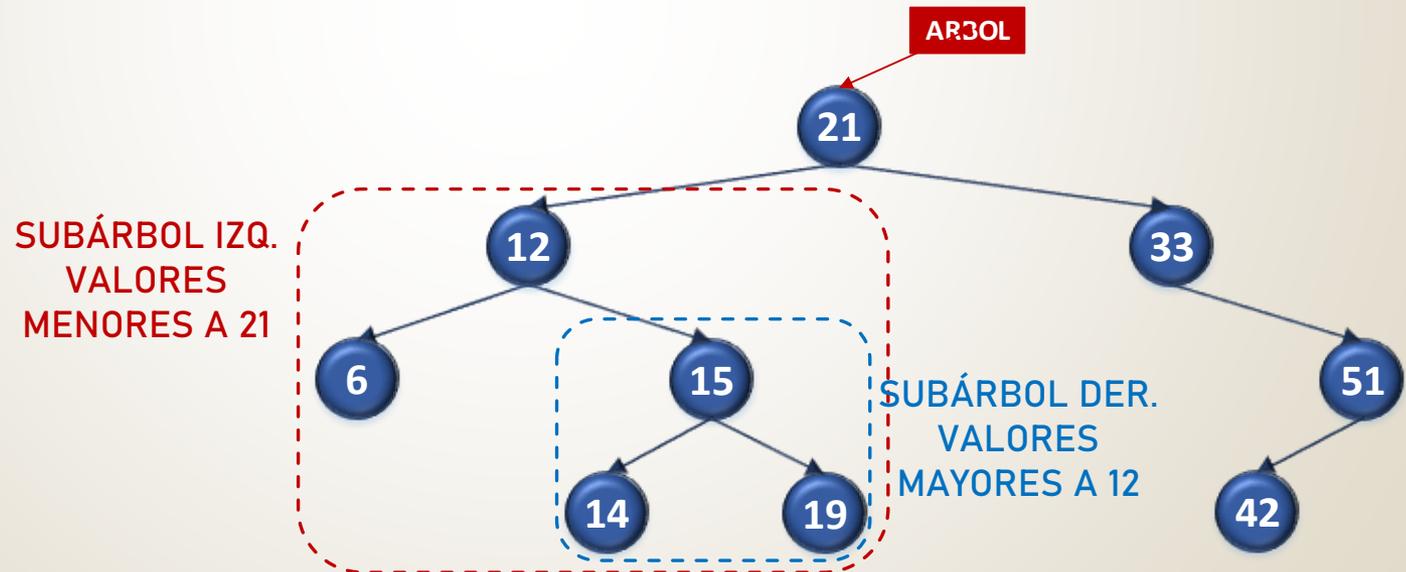
## Árboles Binarios (2)

- Implementación

```
typedef struct tnode *pnodo;  
typedef struct tnode  
    {  
        tipo_dato dato;  
        pnodo izquierdo;  
        pnodo derecho;  
    };
```

# Árboles Binarios de Búsqueda

- Un **árbol binario de búsqueda** es un árbol binario en el que dadas dos condiciones mutuamente excluyentes, para cada nodo, todas las claves de su subárbol izquierdo satisfacen una condición y todas las de su subárbol derecho la otra.

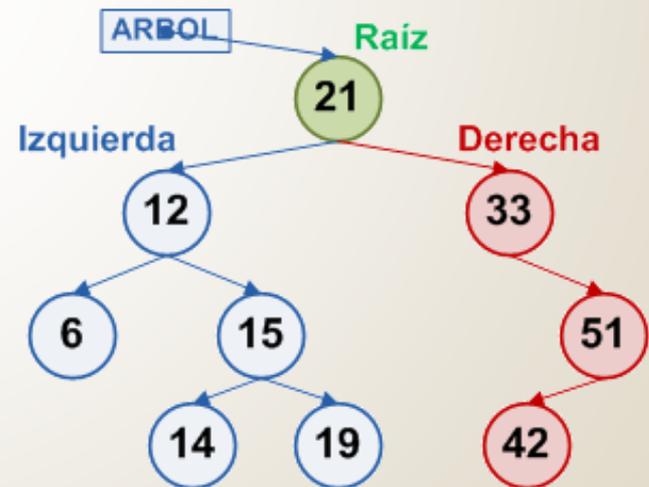


# Operaciones (1)

- Iniciar árbol (inicialización)
- Recorrido
  - Pre-orden (RAÍZ-izquierda-derecha)
  - En-orden (izquierda-RAÍZ-derecha)
  - Pos-orden (izquierda-derecha-RAÍZ)
- Búsqueda (árboles binarios de búsqueda)
- Inserción (árboles binarios de búsqueda)
- Eliminación (árboles binarios de búsqueda)

# Operaciones (2)

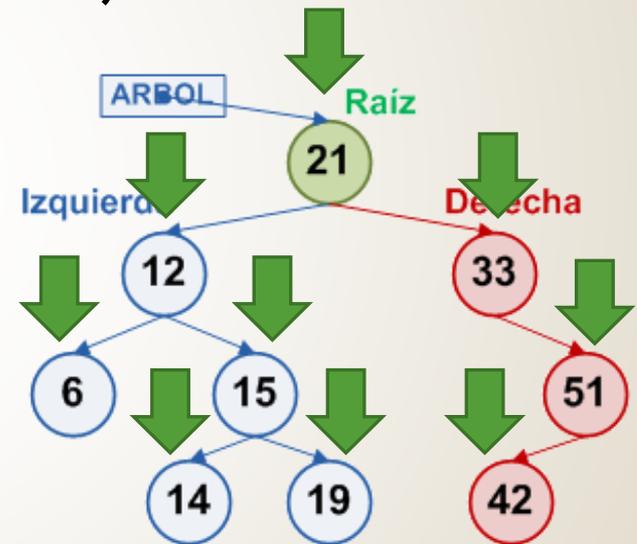
- Recorrido
  - Pre-orden (RAÍZ-izquierda-derecha)
  - En-orden (izquierda-RAÍZ-derecha)
  - Pos-orden (izquierda-derecha-RAÍZ)



# Operaciones (3)

- Recorrido
  - Pre-orden (RAÍZ-izquierda-derecha)

```
void preorden (pnodo a)
{ if (a!=NULL)
  { cout << a->dato;
    preorden (a->izq);
    preorden (a->der);
  }
}
```

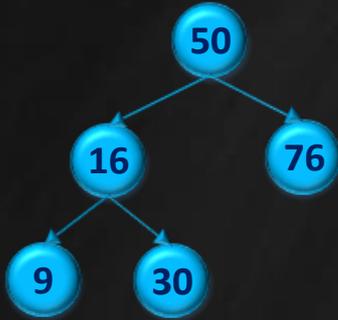


Pre-orden: 21 12 6 15 14 19 33 51 42



# Recorrido en Pre-orden

50 16 9 30 76



a	a!=NULL	Acción
50	V	escribir 50 preorden(a->izq) preorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
16	V	escribir 16 preorden(a->izq) preorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
76	V	escribir 76 preorden(a->izq) preorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
9	V	escribir 9 preorden(a->izq) preorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
30	V	escribir 30 preorden(a->izq) preorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
null	F	-

fin

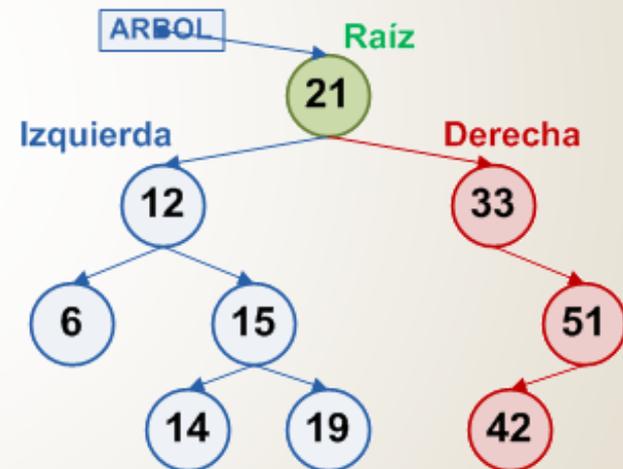
a	a!=NULL	Acción
null	F	-

fin

# Operaciones (4)

- Recorrido
  - En-orden (izquierda-**RAÍZ**-derecha)

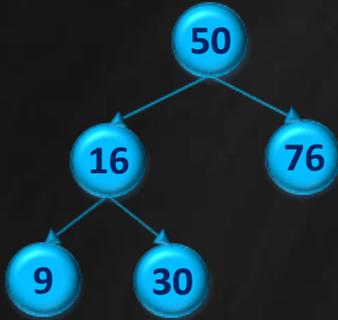
```
void enorden (pnodo a)
{ if (a!=NULL)
  { enorden (a->izq) ;
    cout << a->dato;
    enorden (a->der) ;
  }
}
```



En-orden: 6, 12, 14, 15, 19, 21, 33, 42, 51

# Recorrido en En-orden

9 16 30 50 76



a	a!=NULL	Acción
50	V	enorden(a->izq) escribir 50 enorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
16	V	enorden(a->izq) escribir 16 enorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
76	V	enorden(a->izq) escribir 76 enorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
9	V	enorden(a->izq) escribir 9 enorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
30	V	enorden(a->izq) escribir 30 enorden(a->der)

fin

a	a!=NULL	Acción
null	F	-

fin

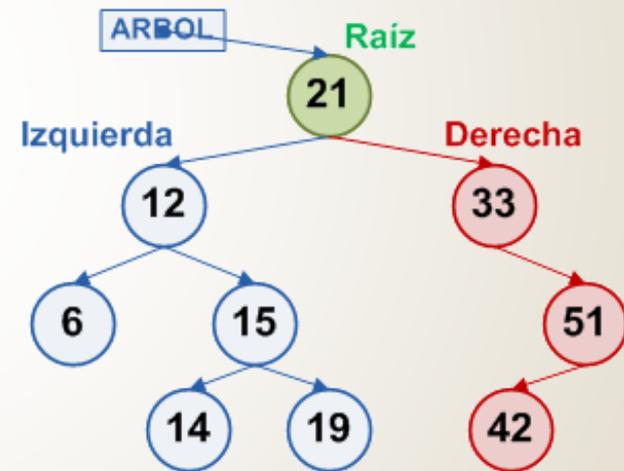
a	a!=NULL	Acción
null	F	-

fin

# Operaciones (5)

- Recorrido
  - Pos-orden (izquierda-derecha-RAÍZ)

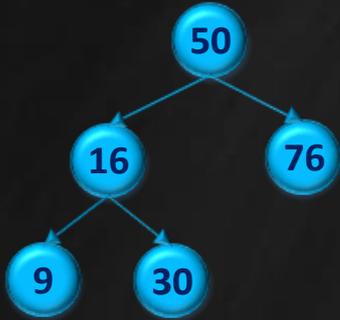
```
void posorden (pnodo a)
{ if (a!=NULL)
  { posorden (a->izq) ;
    posorden (a->der) ;
    cout << a->dato;
  }
}
```



Pos-orden: 6,14,19,15,12,42,51,33,21

# Recorrido en Pos-orden

9 30 16 76 50



a	a!=NULL	Acción
50	V	posorden(a->izq) posorden(a->der) escribir 50

fin

a	a!=NULL	Acción
16	V	posorden(a->izq) posorden(a->der) escribir 16

fin

a	a!=NULL	Acción
76	V	posorden(a->izq) posorden(a->der) escribir 76

fin

a	a!=NULL	Acción
9	V	posorden(a->izq) posorden(a->der) escribir 9

fin

a	a!=NULL	Acción
30	V	posorden(a->izq) posorden(a->der) escribir 30

fin

a	a!=NULL	Acción
null	F	-

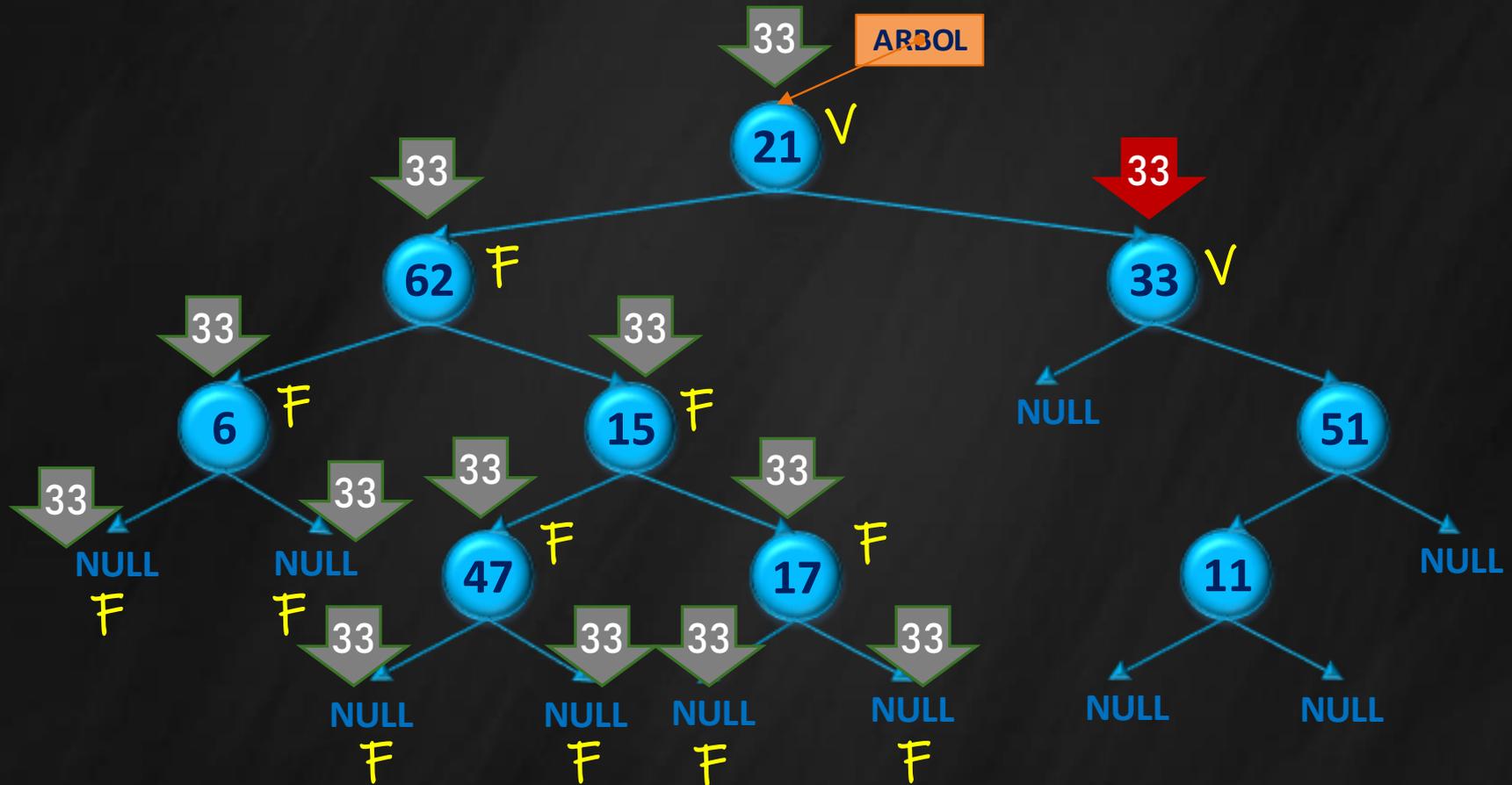
fin

a	a!=NULL	Acción
null	F	-

fin

# Búsqueda en árboles binarios

Caso Positivo: Búsqueda de 33





## Operaciones (6)

- Búsqueda en árboles binarios

```
bool busqueda(pnodo a,int buscado)
{ bool encontrado=false;
  if (a!=NULL)
  { if (a->dato==buscado)
    encontrado=true;
    else
    { encontrado=busqueda(a->izq,buscado);
      if (encontrado==false)
        encontrado=busqueda(a->der,buscado); }
  }
  return encontrado;
}
```

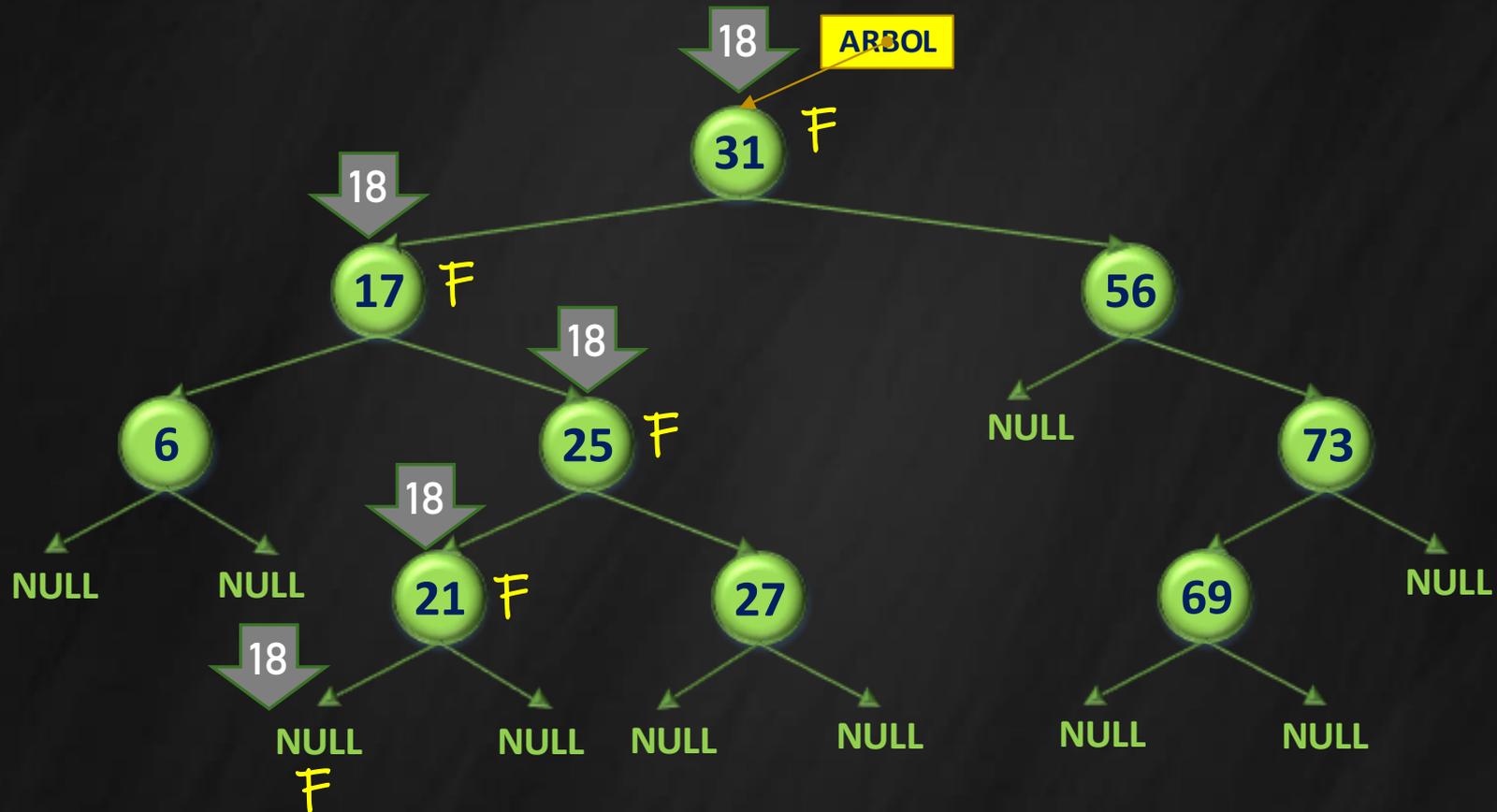
# Búsqueda en árboles binarios de búsqueda

Caso Positivo: Búsqueda de 73



# Búsqueda en árboles binarios de búsqueda

Caso Negativo: Búsqueda de 18



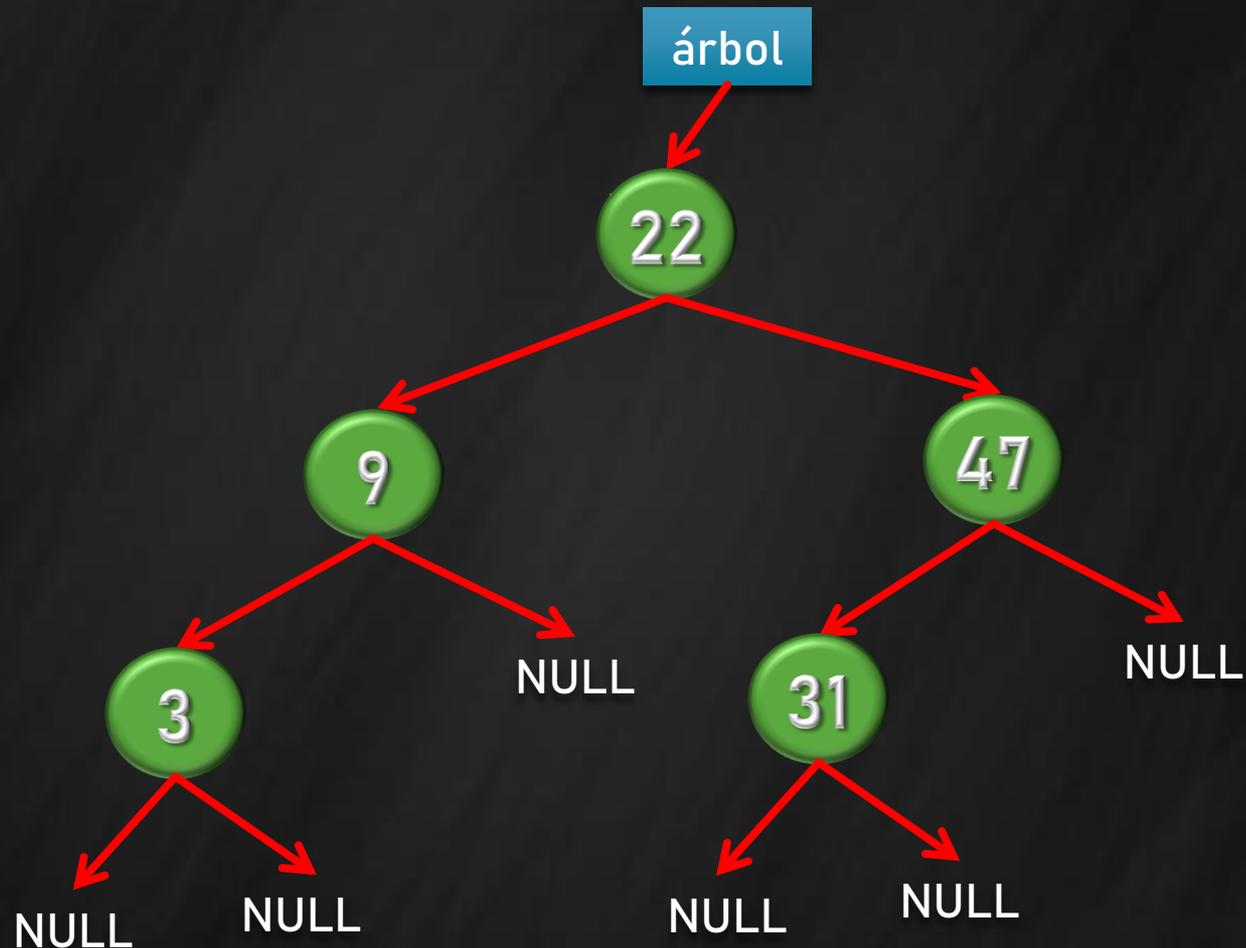
## Operaciones (7)

- Búsqueda en árboles binarios de búsqueda

```
bool busqueda(pnodo a,int buscado)
{ bool encontrado=false;
  if (a!=NULL)
  { if (a->dato == buscado)
    encontrado=true;
    else
      if (buscado < a->dato)
        encontrado=busqueda(a->izq,buscado);
      else
        encontrado=busqueda(a->der,buscado);
  }
  return encontrado;
}
```

# Inserción en árboles binarios de búsqueda

Insertar los valores: ~~22~~, ~~47~~, ~~9~~, ~~3~~, ~~31~~



## Operaciones (8)

- Inserción en árboles binarios de búsqueda

```
void insercion(pnodo &a, pnodo nuevo)
{
    if (a==NULL)
        a=nuevo;
    else
        if (nuevo->dato < a->dato)
            insercion(a->izq, nuevo);
        else
            insercion(a->der, nuevo);
}
```

# Eliminación en árboles binarios de búsqueda

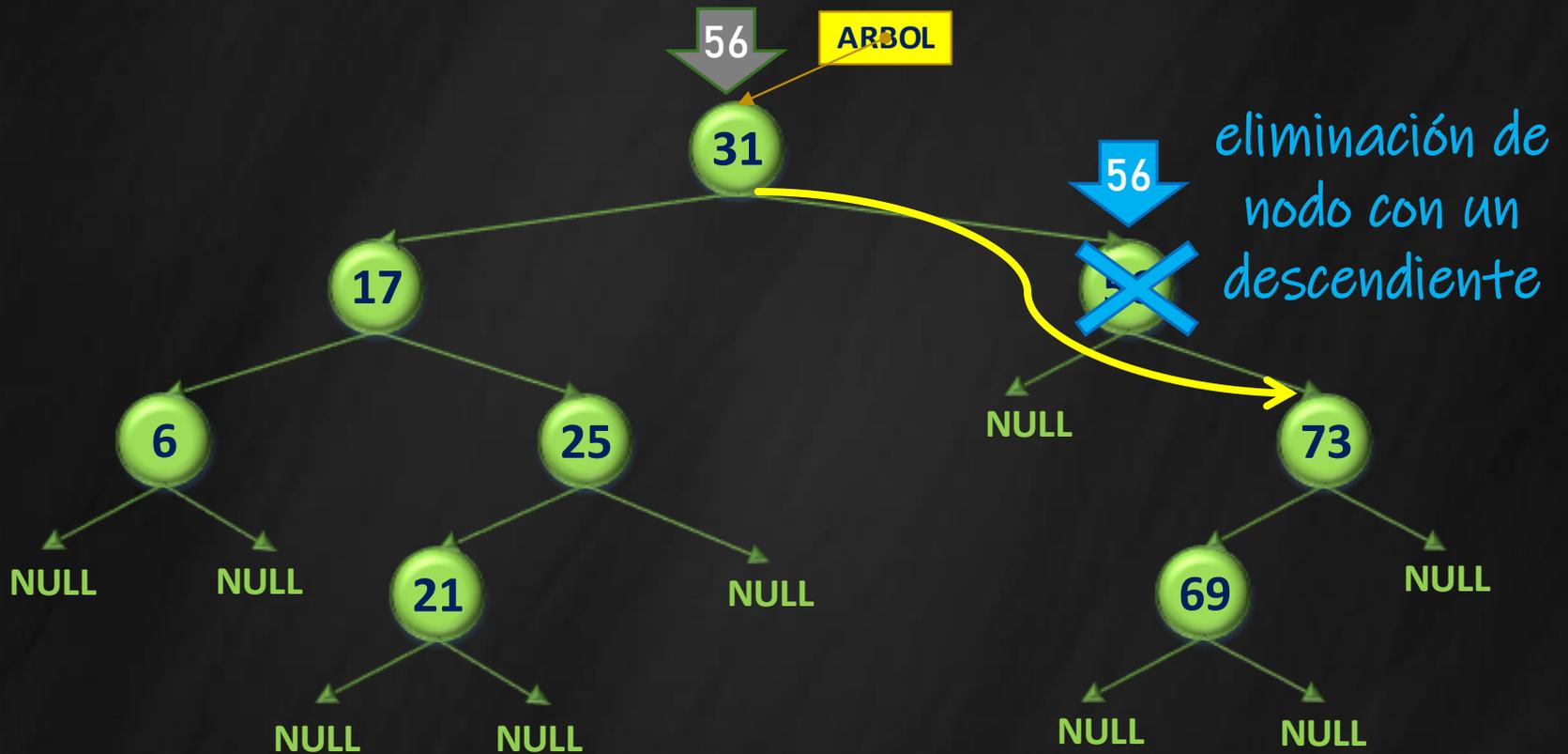
Insertar los valores: 27, 56, 31



eliminación de nodo hoja

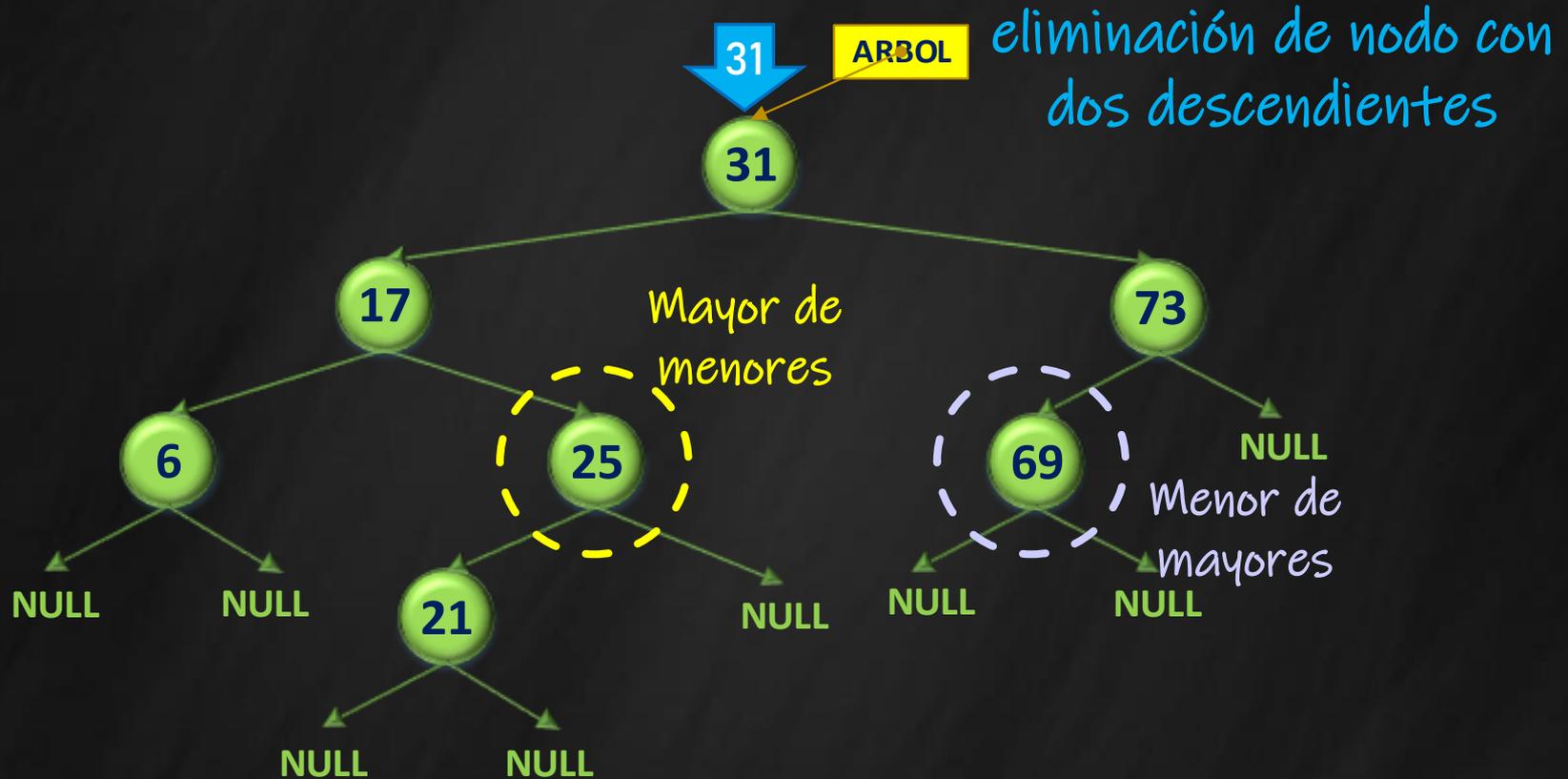
# Eliminación en árboles binarios de búsqueda

Insertar los valores: ~~27~~, 56, 31



# Eliminación en árboles binarios de búsqueda

Insertar los valores: ~~27~~, ~~56~~, 31



# Eliminación en árboles binarios de búsqueda

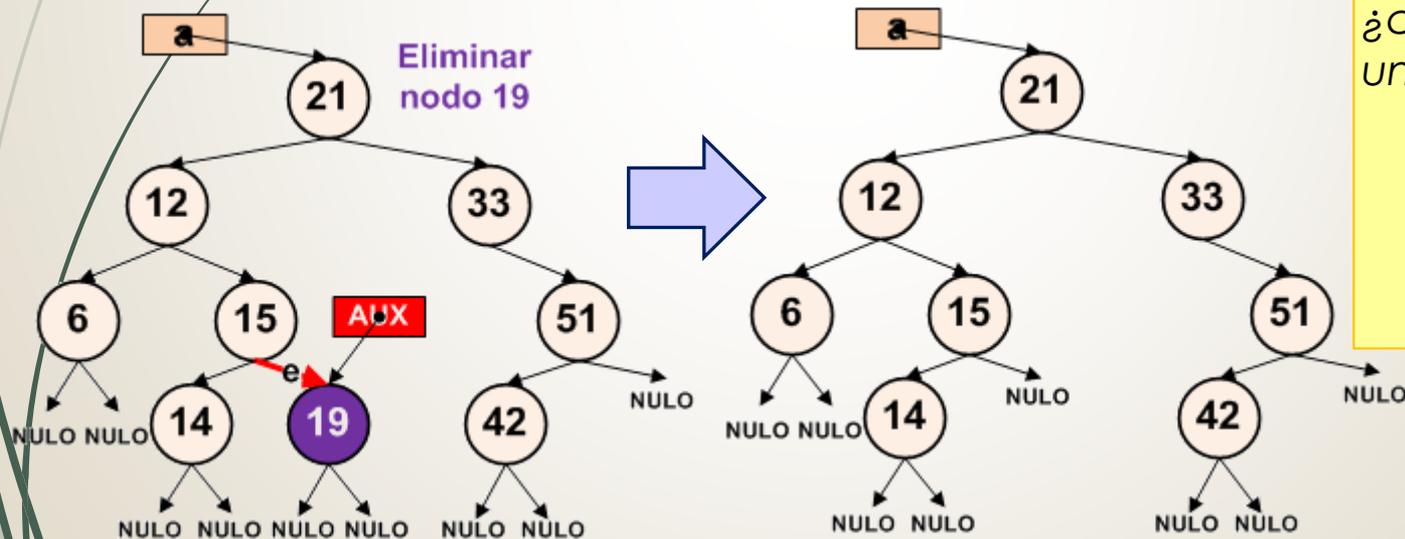
Insertar los valores: ~~27~~, ~~56~~, 31





# Operaciones (9)

- Eliminación en árboles binarios de búsqueda
  - *Caso 1:* Eliminar un nodo hoja
  - *Caso 2:* Eliminar un nodo con un solo descendiente
  - *Caso 3:* Eliminar un nodo con 2 descendientes

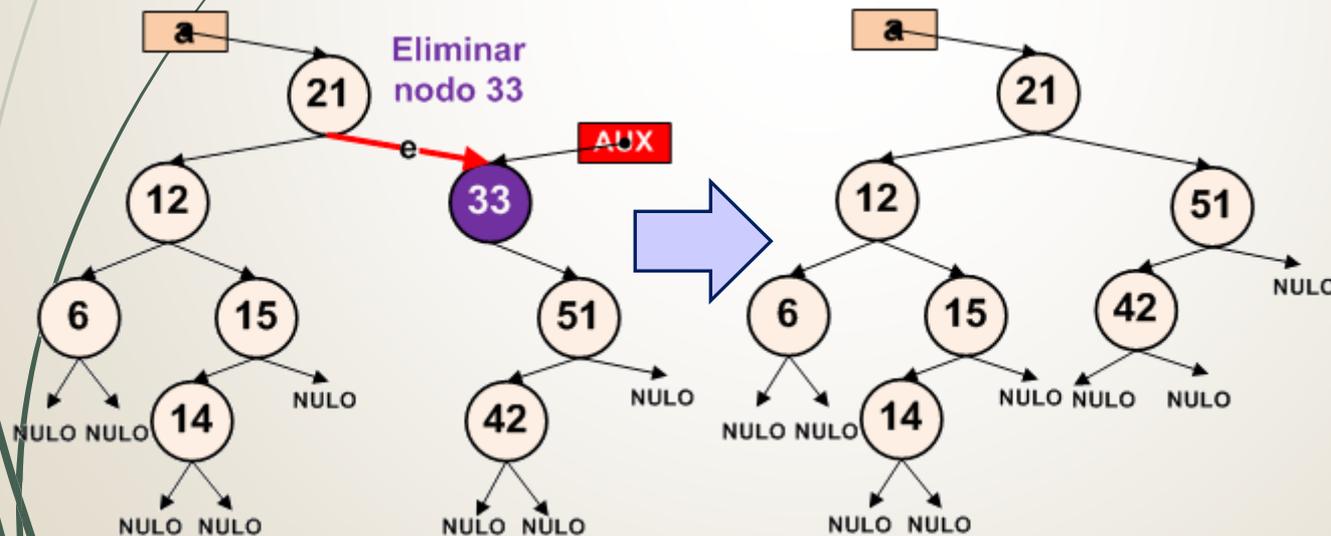


¿cómo se elimina una hoja?

```
aux=e;
e=aux->izq;
...
return aux;
```

# Operaciones (10)

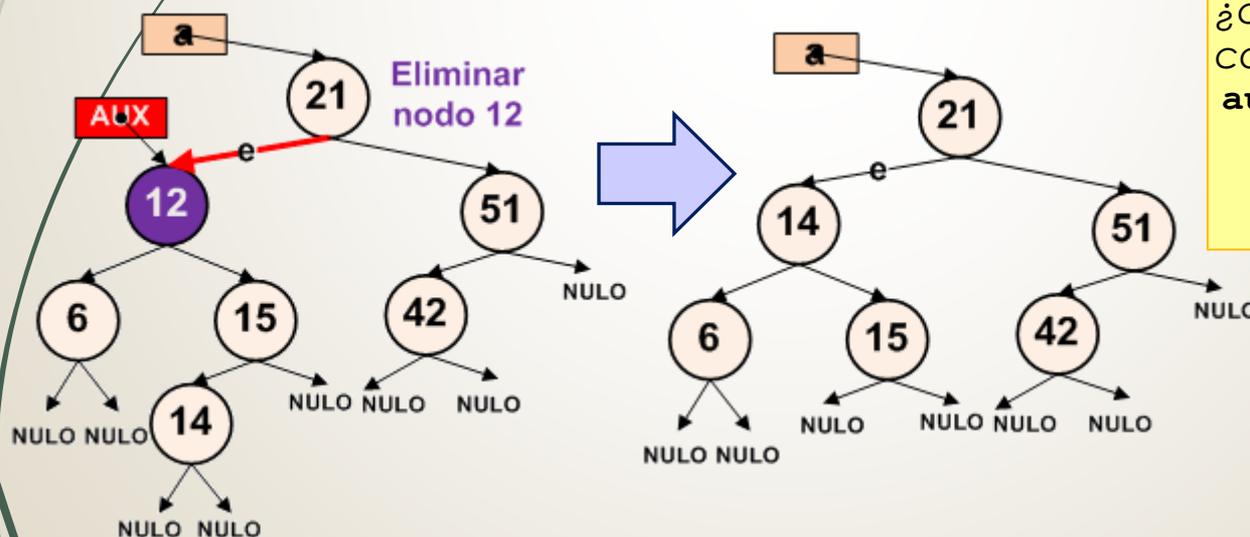
- Eliminación en árboles binarios de búsqueda
  - *Caso 1:* Eliminar un nodo hoja
  - *Caso 2:* Eliminar un nodo con un solo descendiente
  - *Caso 3:* Eliminar un nodo con 2 descendientes



¿cómo se elimina un nodo con 1 hijo?  
 aux=e;  
 e=aux->der;  
 ...  
 return aux;

# Operaciones (11)

- Eliminación en árboles binarios de búsqueda
  - *Caso 1:* Eliminar un nodo hoja
  - *Caso 2:* Eliminar un nodo con un solo descendiente
  - *Caso 3:* Eliminar un nodo con 2 descendientes



¿cómo se elimina un nodo con 2 hijos?  
`aux=men_may(e, e->der);`  
...  
`return aux;`

# Operaciones (12)

## ○ Eliminación en árboles binarios de búsqueda

```
pnode eliminar(pnode &a,int valor)
```

```
{pnode aux;  
  if (a==NULL)  
    aux=NULL;  
  else  
    if (a->dato > valor)  
      aux=eliminar(a->izq,valor);  
    else  
      if (a->dato < valor)  
        aux=eliminar(a->der,valor);  
      else
```

```
{ aux=a;  
  if (a->izq==NULL) Único descendiente  
                    u hoja  
    a=a->der;  
  else  
    if (a->der==NULL) Único  
                      descendiente  
      a=a->izq;  
    else  
      aux=menor_mayores(a,a->der);  
  } Dos descendientes  
  return aux;  
}
```

# Menor de Mayores

Suponiendo que se eliminará 35



## Operaciones (13)

- Eliminación en árboles binarios de búsqueda

```
pnode menor_mayores(pnode elegido, pnode &menor)
```

```
{ pnode aux;
```

```
  if (menor->izq!=NULL)
```

```
    aux=menor_mayores(elegido, menor->izq);
```

```
  else
```

```
    { cambio(elegido->dato, menor->dato);
```

```
      aux=menor;
```

```
      menor=menor->der;
```

```
    }
```

```
  return aux;
```

```
}
```

Se recorre el subárbol derecho buscando el menor valor.

Se sustituye el valor a eliminar por el menor de los mayores y se actualizan punteros.

# Aplicaciones

- Bases de datos
- Indexación de archivos
- Sistemas de archivos
- Sistemas operativos (jerarquías de procesos)
- Conversión de expresiones
- Clasificación de información

## Bibliografía

- Joyanes Aguilar *et al.* Estructuras de Datos en C++. Mc Graw Hill. 2007.
- De Giusti, Armando *et al.* Algoritmos, datos y programas, conceptos básicos. Editorial Exacta. 1998.
- Joyanes Aguilar, Luis. Fundamentos de Programación. Mc Graw Hill. 1996.
- Hernández, Roberto *et al.* Estructuras de Datos y Algoritmos. Prentice Hall. 2001.