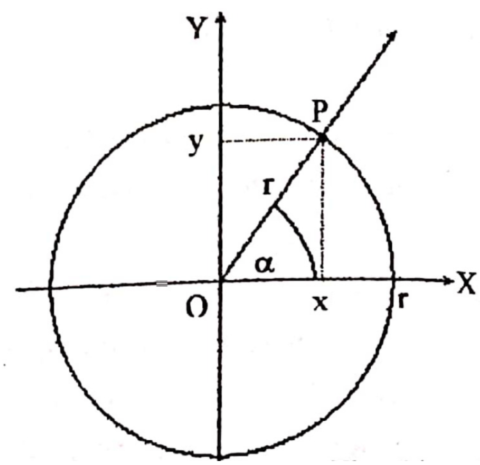
Funciones Trigonométricas

En un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, considerando una circunferencia de radio "r" y centro en el origen se encuentra el ángulo α. Se ve un triángulo rectángulo donde x es el cateto adyacente; y el cateto opuesto y r la hipotenusa, como se ve en la figura.

A partir de esto podemos obtener las definiciones de las funciones trigonométricas:



Seno y coseno.

Se indican con sen α y cos α respectivamente.

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{y}{r} = \frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{hipotenusa}} \qquad \cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{x}{r} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{hipotenusa}}$$

Nota 1: Observar que los cocientes $\frac{x}{r}$ e $\frac{y}{r}$ siempre existen, dado que $r \neq 0$ independientemente del valor que tome α.

Nota 2: **IMPORTANTE!! Independientemente de cuál sea el radio de la circunferencia, el valor de las funciones trigonométricas es siempre el mismo.**

Secante y cosecante.

Se indican con sec α y cosec α respectivamente.

$$\boldsymbol{sec\ \alpha} = \frac{r}{x} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}} \qquad \boldsymbol{cosec\ \alpha} = \frac{r}{y} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}$$

También se las suele definir como: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Tangente y cotangente.

Se indican con tg α y cotg α respectivamente.

$$\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}} \qquad \mathrm{cotg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{x}{y} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}$$

Nota 3: Estas funciones no siempre se pueden calcular para cualquier valor de α, pues en todas las definiciones interviene un cociente y por lo tanto es condición que el denominador sea distinto de cero (para que la función exista).

-- -- -- -- --

Si consideramos la circunferencia de radio 1 (conocida como circunferencia trigonométrica) nos queda:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{y}{1} = y}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{x}{1} = x}$$

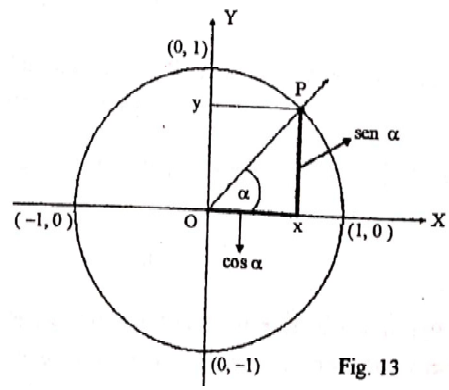


Fig. 13

Observando el gráfico anterior podemos ver que:

$$-1 \leq sen\,\alpha \ \leq 1 \ para\ cualquier\ valor\ de\ \alpha$$

$$Si\ \alpha = 0 \ \rightarrow \ sen\,\alpha = 0$$

$$Si\ \alpha = \frac{\pi}{2} \ \rightarrow \ sen\,\alpha = 1$$

$$Si\ \alpha = \pi \ \rightarrow \ sen\,\alpha = 0$$

$$Si\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \ \rightarrow \ sen\,\alpha = -1$$

$$Si\ \alpha = 2\pi \ \rightarrow \ sen\,\alpha = 0$$

Si α varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces sen α varía entre 0 y 1 (crece)

Si α varía entre $\frac{\pi}{2}$ y π, entonces sen α varía entre 1 y 0 (decrece)

Si α varía entre π y $\frac{3\pi}{2}$, entonces sen α varía entre 0 y -1 (decrece)

Si α varía entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, entonces sen α varía entre -1 y 0 (crece)

Haciendo una generalización tenemos que sen α = 0 → α = kπ con k ϵ $\mathbb{Z}$

Dom (seno) = $\mathbb{R}$ e Img (seno) = [-1, 1]

Se puede realizar el mismo tipo de análisis para cada una de las funciones trigonométricas.

<u>Representación gráfica de las funciones trigonométricas.</u>

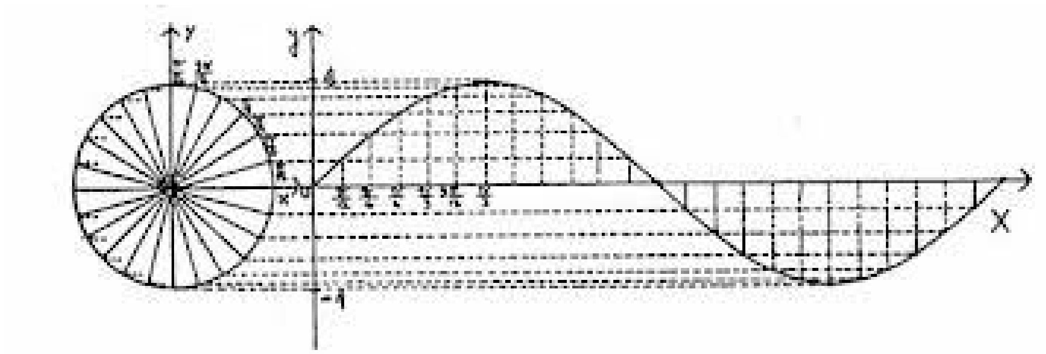
Las gráficas de las funciones trigonométricas poseen máximos, mínimos, asíntotas (línea recta que se aproxima continuamente a una función o curva), etc.

Las gráficas de estas funciones se extienden sobre los ejes coordenados, si observamos el eje de x, vemos que tienen la característica de repetirse por intervalos. Esto significa que cada cierta cantidad de radianes, una parte de la gráfica de la función es la misma (periodo).

Estas gráficas se pueden hacer considerando todo lo visto anteriormente.

Ejemplo: **seno de x.**

La gráfica de la función seno del ángulo x se puede obtener transfiriendo puntos de la circunferencia trigonométrica (radio unitario) al sistema rectangular de coordenadas (ejes cartesianos). Recuerde que la función seno del ángulo x es el valor de ***y*** (y = sen x). El ciclo fundamental de la función seno del ángulo comienza en 0 y termina en 2π. Esto se puede observar en la figura de abajo.



Complete su conocimiento viendo el video disponible en el aula virtual.

De la misma manera se puede hacer para las otras funciones. En la figura de más abajo puede ver cómo serían esas gráficas (el gráfico “b” corresponde al seno de x).