- Se sabe que 10 es el número promedio de camiones tanque de aceite que llegan por día a una cierta ciudad portuaria . Las instalaciones del puerto pueden atender , cuanto mucho , a 15 camiones – tanque en un día . ¿ Cuál es la probabilidad de que en un determinado día se tengan que regresar los camiones tanque ?

Se trata de una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 10$ para la variable aleatoria discreta **X** : *"cantidad de camiones que llegan por día "* para la que debemos calcular P (**X** > 15)

$$P(X > 15) = 1 - P(X \le 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} (e^{-10}\ 10^{x}) / x! = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487$$

La P (X ≤ 15) puede obtenerse de la tabla de distribución acumulada para Poisson en la que se ingresa con el parámetro y el último valor de la variable aleatoria ; $\mu = 10$ y $x = 15$ respectivamente en este caso.

La distribución de Poisson como límite de la distribución binomial

Para una variable aleatoria con distribución binomial si el número de pruebas es grande ($n \ge 20$) ~~en la~~ y p , la probabilidad de éxito cercana a cero ($p \le 0{,}05$), la distribución de Poisson puede utilizarse , para aproximar la distribución binomial. En estos casos se toma el parámetro de Poisson como $\mu = n\,p$.

Ejemplo :

En un proceso de manufactura en el cual se producen piezas de vidrio , ocurren defectos o burbujas. Se sabe que , en promedio una de cada mil piezas tiene una o más burbujas . ¿ Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 8.000 piezas , menos de 7 de ellas tengan burbujas ?

Este es un experimento donde la variable aleatoria **X** : " número de piezas con burbujas " es binomial con $n = 8000$ y $p = 0{,}001$ donde la probabilidad solicitada se obtiene haciendo :

$$P(X < 7) = P(X \le 6) = \sum_{x=0}^{6} \binom{8000}{x} 0{,}001^{x}\ 0{,}999^{\,n-x}$$

Dado que p se acerca a 0 y n es suficientemente grande se puede aproximar la distribución binomial a la de Poisson con parámetro $\mu = 8000\ 0{,}001 = 8$ y obtener la probabilidad requerida del siguiente modo :

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^{6} (e^{-8}\ 8^{x}) / x! = 0{,}3134$$

Se agregan como anexos las tablas que ayudan al cálculo de probabilidades de las distribuciones binomial y de Poisson .

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Distribucion Uniforme (o Rectangular)

Sean **a** y **b** dos números reales tales que **a < b** y sea el experimento que consiste en seleccionar un punto X del intervalo **[a , b]** de forma que ***la probabilidad de que*** X ***pertenezca a cualquier intervalo contenido en*** [a , b] ***es proporcional a la longitud de ese intervalo*** .

La **constante de proporcionalidad** es **1 / (b – a)** .

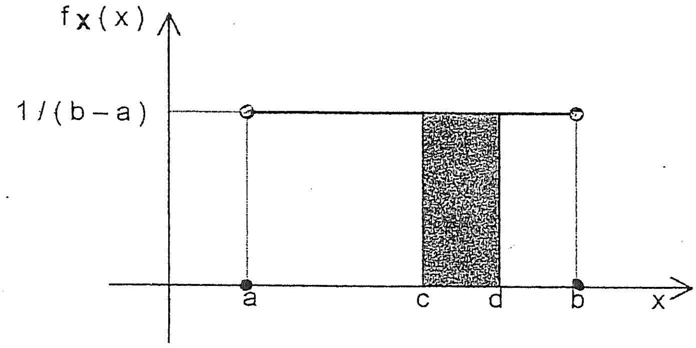
Esta distribución de la VA X continua se denomina **uniforme (o rectangular) sobre [a , b]**. Entonces :

La **función de densidad** de una variable aleatoria continua **X** definida como

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se denomina **uniforme (o rectangular) sobre [a , b]**

La representación gráfica de esta función resulta :



Además obtenemos : $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_a^b [1/(b-a)]\,dx = 1$

$$P(c < X < d) = \int_c^d [1/(b-a)]\,dx = (d-c)/(b-a)$$

Puesto que la probabilidad que se seleccione uno de los puntos extremos **a** o **b** es cero, es irrelevante que en la expresión de $f_X(x)$ se indiquen intervalos abiertos , cerrados o semiabiertos .

Esperanza y varianza

Como la esperanza de una VA continua se definió como $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$, reemplazando , se obtiene:

$$\mu_X = \int_a^b [x/(b-a)]\,dx = (x^2/2)(b-a)\Big]_a^b = (b^2-a^2)/2(b-a)$$

$$\boxed{\mu_X = (b+a)/2}$$

Teniendo en cuenta que la varianza de una variable aleatoria continua se definió :

$\sigma_X^2 = VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx$, reemplazando e integrando, obtenemos

$$\boxed{\sigma_X^2 = (b-a)^2/12}$$

Distribucion Normal

Distribución normal estándar

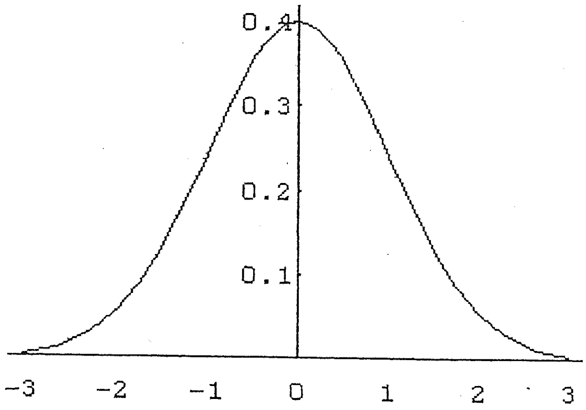
Una variable aleatoria continua **Z** tiene una **distribución normal estándar** si la función de densidad es

$$f_Z(z) = (1/\sqrt{2}\pi)\, e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty$$

y su gráfica recibe el nombre de **curva normal**.

La curva normal tiene forma de campana y tiene las siguientes propiedades :

- La **moda** que es el valor de la abscisa donde la curva tiene su máximo y ocurre en $z = 0$.
- La curva es simétrica con respecto al eje de ordenadas .
- Los puntos de inflexión están en $z = \pm 1$. Resulta cóncava hacia abajo en si $-1 < z < 1$ y cóncava hacia arriba si $z > 1$ o $z < -1$.
- La curva se acerca al eje de abscisas en forma asintótica en cualquiera de los dos sentidos alejándose del cero ($f_Z(z) \to 0$ si $z \to \infty$ o si $z \to -\infty$).
- El área total entre la curva y el eje z u eje de abscisas es 1 .



Una variable aleatoria **Z** que se distribuye según la normal estándar se simboliza $Z \sim N_E$.

La **esperanza** o **media** de esta distribución es 0 y es decir $E(Z) = \mu_Z = 0$.

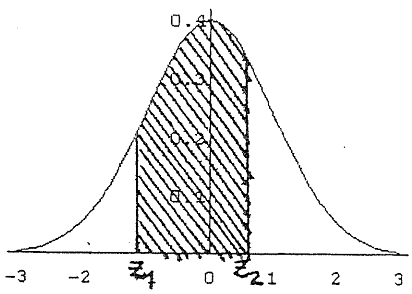
La **desviación estándar** es 1. Resulta $VAR(Z) = \sigma_Z^2 = 1 \Rightarrow \sigma_Z = \sqrt{VAR(Z)} = 1$

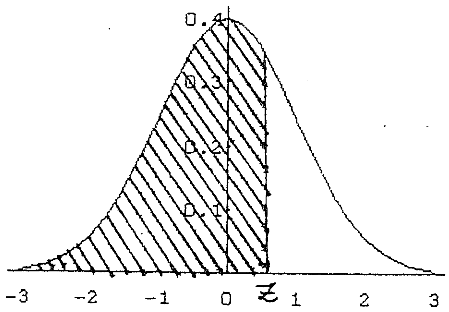
Estos valores, 0 y 1 son los **parámetros** de la distribución normal estándar.

Para calcular probabilidades para una variable aleatoria con distribución normal estándar , empleamos :

$$P(z_1 < Z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-z^2/2}\, dz$$

El resultado de esta integral definida coincide con el área de la región sombreada





Sea $\phi(z)$, la **FDA** de la normal estándar , entonces

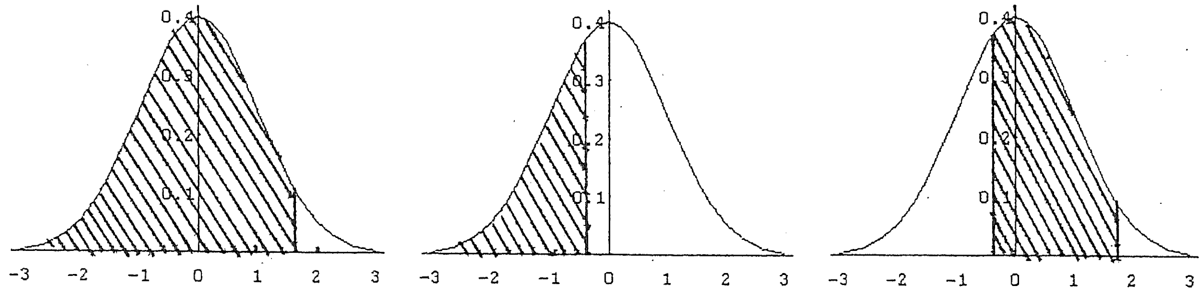
$$\phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-u^2/2}\, du$$

Esta probabilidad tiene un valor que coincide con el área sombreada.

Es habitual emplear tablas en donde figuran los valores de la función distribución acumulada (áreas bajo la curva normal estándar a la izquierda de z) para calcular probabilidades.

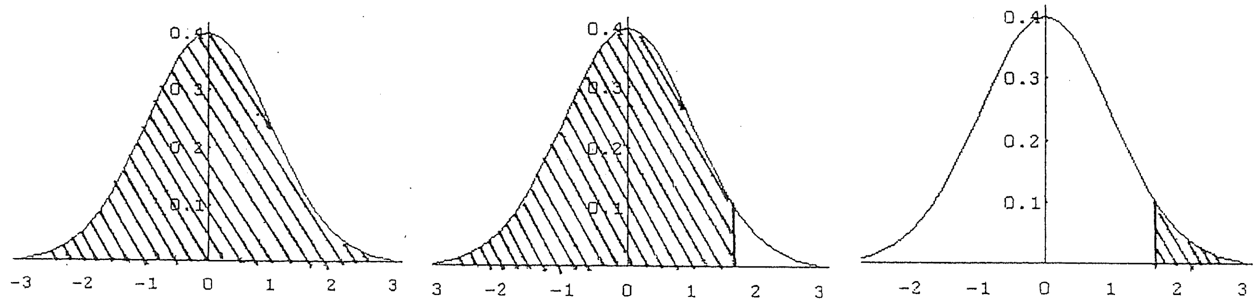
Si calculamos probabilidades usando esta tabla para una VA (Z) / $Z \sim N_E$, resulta :

- $P(Z \leq 1{,}75) = \phi(1{,}75) = 0{,}9599$ si entramos en la tabla con $z = 1{,}75$
- $P(-0{,}32 \leq Z \leq 1{,}75) = \phi(1{,}75) - \phi(-0{,}32) = 0{,}9599 - 0{,}3745 = 0{,}5854$
  si entramos en la tabla con $z = 1{,}75$ y a este valor le restamos el que corresponde a $z = -0{,}32$



$P(Z \leq 1{,}75)$	-	$P(Z \leq -0{,}32)$	=	$P(-0{,}32 < Z \leq 1{,}75)$
$\phi(1{,}75)$	-	$\phi(-0{,}32)$	=	$P(-0{,}32 < Z \leq 1{,}75)$

- $P(Z > 1{,}75) = 1 - \phi(1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$, según se observa a continuación :



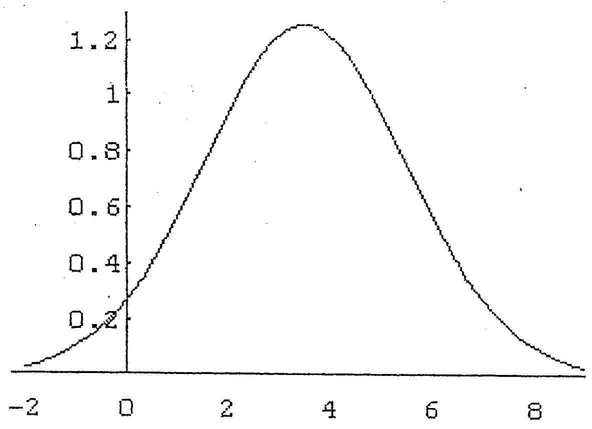
1	-	$P(Z \leq 1{,}75)$	=	$P(Z > 1{,}75)$
1	-	$\phi(1{,}75)$	=	$P(Z > 1{,}75)$

Distribución normal con parámetros μ_X , σ^2_X

En los problemas reales, las distribuciones de la variable aleatoria X pueden tomar la forma de una cualquiera de las infinitas curvas normales distintas que surgen al variar los valores de media μ_X y desviación estándar σ_X , el máximo y punto de inflexión de la curva respectivamente. En estos casos tenemos , entonces la distribución normal con parámetros $\mu_X / \mu_X \neq 0$ y $\sigma^2_X / \sigma^2_X \neq 1$ y que se indica $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$

> Una variable aleatoria tiene **distribución normal con parámetros** μ_X , σ^2_X ($X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$) si su **función de densidad** puede expresarse como :
>
> $$f_X(x) = (1 / \sigma_X \sqrt{2\pi})\ e^{-(½)[(x - \mu_X)/\sigma_X]^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

La función definida tiene la representación gráfica siguiente para el caso de $\mu_X = 3{,}5$ y $\sigma_X = 2$:



La curva tiene las siguientes propiedades :

- La moda ocurre en $x = \mu_X$. La moda coincide con la media y con la mediana
- Es simétrica con respecto al eje vertical de ecuación $x = \mu_X$.
- Presenta puntos de inflexión en $x = \mu_X \pm \sigma_X$ donde σ_X es la desviación estándar
- El área bajo la curva es uno ; es decir:

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$, $f_X(x)$ es la distribución normal de parámetros μ_X, σ_X^2 $(X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2))$

Sea ξ la **FDA** para la variable aleatoria **X** / $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, es decir :

$$\xi(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} (1/\sigma_X\sqrt{2\pi})\, e^{-(1/2)[(t-\mu_X)/\sigma_X]^2}\, dt$$

Proponemos la **sustitución** $z = (t - \mu_X)/\sigma_X$ y obtenemos : $dz = dt/\sigma_X$

si $t = x \Rightarrow z = (x - \mu_X)/\sigma_X$ y si $t = -\infty \Rightarrow z = -\infty$

Reemplazamos en la expresión para la **FDA** , la función ξ y resulta :

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{(x-\mu_X)/\sigma_X} (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-(1/2)z^2}\, dz = P(Z \le (x-\mu_X)/\sigma_X) = \phi((x-\mu_X)/\sigma_X)$$

Así hemos definido una **VA** Z donde $Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$ a la que le corresponde una distribución normal estándar , $Z \sim N_E$ donde los parámetros son 0 y 1 .Vale decir que , para calcular probabilidades de una variable aleatoria **X** cuando **X** tiene una **distribución normal de parámetros** $\mu_X \neq 0$, $\sigma_X^2 \neq 1$ empleamos los valores conocidos para la distribución normal estándar definiendo esta nueva variable aleatoria llamada **variable estandarizada** $Z / Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$. De este modo , podemos calcular la probabilidad buscada haciendo :

$$P(X \le x_1) = P(Z \le z_1) = P((X - \mu_X)/\sigma_X \le (x_1 - \mu_X)/\sigma_X)$$

e ingresando en la tabla de distribuciones acumuladas para la distribución normal estándar con el valor z_1 obtenido como $z_1 = (x_1 - \mu_X)/\sigma_X$

Tenemos , por ejemplo , que **X** se distribuye normalmente con media $\mu_X = 3{,}5$ y desviación estándar $\sigma_X = 1$, para calcular $P(X < 3{,}9)$ hacemos :

$$P(X < 3{,}9) = P(Z < (3{,}9 - 3{,}5)/1) = P(Z < 0{,}4) = 0{,}6554$$

Este valor lo obtuvimos ingresando en la tabla de distribución acumulada con el valor 0,4

Ejemplos :

1) Las piezas de pan distribuidas por una cierta panadería tienen una longitud promedio de 30 cm y una desviación estándar de 2 cm . Suponiendo que las longitudes están normalmente distribuidas, obtener la probabilidades siguientes : A) que las piezas tengan una longitud menor que 25,5 cm . B) que la longitud esté entre 29,3 y 33,5 cm y C) que las piezas tengan más de 31,7 cm de longitud .

La variable aleatoria X es la ***" longitud de las piezas de pan "*** y tiene una distribución normal de media $\mu_X = 30$ cm y desviación estándar $\sigma_X = 2$ cm .
La variable estandarizada es $Z = (X - \mu_X) / \sigma_X = (X - 30) / 2$ y tiene una distribución normal estándar.

A) $P(X < 25{,}5) = P(Z < (\mathbf{25{,}5} - 30)/2) = P(Z < -2{,}25) = \phi(-2{,}25) = 0{,}0122$

En este caso buscamos en la tabla el valor correspondiente a $z = -2{,}25$. Este valor corresponde al área bajo la normal a la izquierda de $-2{,}25$.

B) $P(29{,}3 < X < 33{,}5) = P((\mathbf{29{,}3} - 30)/2) < Z < (\mathbf{33{,}5} - 30)/2) = P(-0{,}35 < Z < 1{,}75)$

$\Rightarrow \quad P(29{,}3 < X < 33{,}5) = \phi(1{,}75) - \phi(-0{,}35) = 0{,}9599 - 0{,}3632$

En esta situación al valor correspondiente al área a la izquierda de 1,75 , le restamos el que se obtiene para el área a la izquierda de - 0,35 .

C) $P(X > 31{,}7) = P(Z > (\mathbf{31{,}7} - 30)/2) = P(Z > 0{,}85) = 1 - P(Z < 0{,}85) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad P(X > 31{,}7) = 1 - \phi(0{,}85) = 1 - 0{,}8023 = 0{,}1977$

2) Dada una distribución normal con media $\mu_X = 40$ y desviación estándar $\sigma_X = 6$, encuentre el valor de x que tiene : A) El 45 % del área a su izquierda. B) El 14 % del área a la derecha

A) Se requiere un valor x_1 de X que tenga un área de 0,45 a su izquierda ; es decir

$$P(X < x_1) = 0{,}45 \quad \text{donde} \quad X \sim N(\mathbf{40}, \mathbf{6^2})$$

Para la variable estandarizada $Z = (X - \mu_X) / \sigma_X$ se obtiene $P(Z < z_1) = 0{,}45$ si $z_1 = -0{,}13$ buscando en la tabla el valor z_1 correspondiente a un valor de área a su izquierda igual o lo más próximo posible a 0,45 .

Como $z_1 = (x_1 - \mu_X) / \sigma_X$ entonces $x_1 = z_1 \sigma_X + \mu_X$

En nuestro caso el valor buscado es $x_1 = -0{,}13 \,.\, 6 + 40 = 39{,}22$

B) Se debe calcular el valor x_2 tal que $P(X > x_2) = 0{,}14$

Sabemos que $P(X > x_2) = 1 - P(X < x_2) = 0{,}14$; entonces como $P(X < x_2) = 0{,}86$ el valor x_2 lo obtengo buscando en la tabla el z que corresponde a un área a su izquierda igual o lo más próximo posible a 0,86 .

Así obtenemos que $P(Z < z_2) = 0{,}86$ si $z_2 = 1{,}08$.

El valor de x_2 buscado es $x_2 = z_2 \sigma_X + \mu_X = 1{,}08 \;\, 6 + 40 = 46{,}48$