TEMA 7: INTEGRALES MÚLTIPLES

Contextualización

01-C. Dada una lámina delgada triangular de vértices (0,0), (0,3) y (2,3) cuya densidad en cada punto (x, y) viene dada por $\rho(x, y) = 2x + y$, determinar el punto de tal lámina en donde debe apoyarse sobre un cono metálico para que se mantenga en equilibrio.

Observación Reflexiva

01-R. Encuentre algún significado a la relación que existe entre las integrales dobles y las integrales definidas de funciones de una sola variable.

02-R. Relacione los conceptos de área y de volumen con el de integral doble.

03-R. Imagínese en qué situación, una vez recibido, podría necesitar utilizar sus conocimientos sobre este tema al desempeñar su profesión.

Conceptualización

01-T. Defina la integral doble de una función escalonada e interprete geométricamente el resultado de la definición.

02-T. ¿Por qué en la bibliografía se acostumbra a clasificar las regiones de integración, para las integrales dobles, en "*regiones tipo 1*" y "*regiones tipo 2*"?

03-T. ¿Qué entiende por *"fórmula de transformación de coordenadas"* o *"cambio de variables"* en una integral doble? ¿Qué es un Jacobiano?

Experimentación Activa

01-E. Colocar los límites de integración en uno y otro orden de la $\iint_R f(x, y)\, dxdy$ siendo R la región que queda determinada por las siguientes curvas:

a) $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 1\ ,\ x + y = 2$

b) $x = -2,\ \ x = y,\ \ y = x^2 + 2x$

c) $y = 0,\ \ y + x = 2,\ \ 4x^2 + 9y^2 = 36$ en el primer cuadrante

d) $x = 3,\ \ 2x + 3y = 3,\ \ x + 1 = y^2$

02-E. Dadas las siguientes integrales: a) Dibujar la región de integración, b) cambiar el orden de integración, c) resolver la integral para $f(x, y) = 1$

a) $\displaystyle\int_1^2 \left[\int_0^{x^3} f(x, y) dy\right] dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^1 \left[\int_{y-1}^{1-y^2} f(x, y) dx\right] dy$

c) $\displaystyle\int_0^3 \left[\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx\right] dy$

d) $\int_1^2 \left[\int_1^x f(x,y)dy\right] dx + \int_2^4 \left[\int_1^{\frac{4}{x}} f(x,y)dy\right] dx$

03-E Resolver:

a) $\int_{-1}^{1} \left[\int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)dx\right] dy$

b) $\int_{-3}^{3} \left[\int_{y^2-4}^{10} (x + 2y)dx\right] dy$

c) $\int_{-4}^{0} \left[\int_0^{\frac{x+4}{2}} e^{-y^2+4y} dy\right] dx$

04-E Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

a) $\iint_R (6 - x - y)^{-1} dxdy$, en donde R: $|x + y| \leq 2 \wedge y \leq x + 2 \leq 4$ usando la transformación $(x, y) = (u, u - v)$.

b) $\iint_R (x - y)e^{x^2-y^2} dxdy$, en donde R es la región del plano limitada por las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = -1$ y las rectas $y + x = 3, y + x = 1$ usando la transformación $(x, y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

c) Calcule el área de la región plana definida por $1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4$, $a, b \in R^+$, usando la transformación $(x, y) = (a\rho cos\theta, b\rho sen\theta)$.

d) $\iint_R (x + y)dxdy$, en donde $R = \{(x, y)/1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$ usando coordenadas polares.

e) Calcule el área de la región plana encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x = 0$ usando coordenadas polares.

05-E. Hallar el área de la región limitada por:

a) $y^2 - 4 = x, 3y^2 + 4x = 12$

b) $y = x^2 + 2x,\ y = 3, y = 3x + 6, x = 0$

c) interior a $x^2 + y^2 = 4$ con $x \geq 1$

d) exterior a $x^2 + y^2 = 2$ e interior a $x^2 + y^2 = 2y$

06-E. Usando integrales dobles, calcular el volumen del sólido:

a) limitado por los planos: $3x + 2y + z = 12, z = 0$

b) limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4$ y los planos coordenados

c) limitado por $x^2 + y^2 + z = 5$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $y - x = 0$ e $y = 0$

07-E. Resolver:

a) $\int_{-1}^{1} \int_1^2 \int_0^1 (2x + 3y + z)dzdx\, dy$

b) $\iiint_T x^2 \cos z\, dzdxdy$ donde T es el cuerpo limitado por los planos $z = 0, x = 0, y = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, $y + x = 1$

08-E. Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas conveniente.

a) $\iiint_T (x^2 + y^2) dxdydz$ donde T es el cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $x = 0, y = 0, z = 1$

b) $\iiint_T z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ donde T es el cuerpo limitado por $x^2 + y^2 = 2x,\ x = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 3,\ z = 1$

c) $\iiint_T \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$ donde T es el cuerpo limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z^2 = 3(x^2 + y^2)$

09-E. Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo T, usando el sistema de coordenadas más conveniente

a) $z = 4 - x^2, x = 0, y = 1, y = 6, z = 0$

b) $2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4, y = 0, z = 0$

c) $3z = x^2 + y^2,\ z^2 = 4 - (x^2 + y^2)$

d) $x^2 + y^2 = z^2\ \ x^2 + y^2 + z^2 = z$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y = 0,\ y = x$ en el primer octante.

10-E. Calcule la masa de los siguientes cuerpos:

a) Cuerpo del primer octante limitado por $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 3$ si la densidad en cada punto está dada por la función $f(x, y, z) = \frac{1}{2}z$.

b) Cuerpo limitado por $x + y + z = 1$ y los planos coordenados si la densidad en cada punto está dada por la función $f(x, y, z) = 5x - 3y$.

c) Cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2, z = 8 - 2x^2 - 2y^2$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

----ooo0ooo----