TEMA 5: CÁLCULO EN CAMPOS ESCALARES

Contextualización

01-C. Dos barcos que salieron al mismo tiempo de un punto van uno hacia el norte y el otro hacia el noreste. Si las velocidades de dichos barcos son de 20 km/h y 40 km/h respectivamente, ¿con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos?

02-C. Si x e y son precios de dos artículos de primera necesidad y demanda $D(x, y)$ de ellos se puede expresar mediante un modelo matemático a través de la función, $D(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{e^x}$, determinar $\frac{\partial D}{\partial x}$ y $\frac{\partial D}{\partial y}$ e interpretar sus significados.

Observación Reflexiva

01-R. La derivada de una función de una variable mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto de la variable independiente. ¿Cómo relaciona este concepto con el de derivadas parciales de una función de dos variables?

02-R. ¿En el campo de la física, puede considerarse la distribución de la temperatura en un cuerpo como un campo escalar? Fundamentar en caso afirmativo y mencionar posibles variables independientes que definirían un valor de la temperatura como variable dependiente.

03-R. Proponga un ejemplo aplicado de una función real de dos variables reales. Identifique qué magnitud representa la función y qué magnitudes representan las variables. Describa el sentido de la función. Quedan excluidas de las posibles respuestas las funciones relacionadas con Geometría.

Conceptualización

01-T. Si una función $f(x, y)$ presenta una derivada direccional nula en un punto de su dominio ¿qué particularidad presenta la función en dicho punto?

02-T. Explique la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas de varias variables.

03-T. Sea N el número de potenciales interesados en tomar un curso de actualización profesional. Sea p el costo total del curso y q el valor que las empresas del medio le asignan al certificado que se otorga. Defina conceptualmente si es razonable suponer que N es función de p y de q y que, además, $Np < 0 \wedge Nq > 0$.

Experimentación Activa

01-E. Hallar y graficar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$

b) $f(x, y) = x \operatorname{arc\,sen} y$

c) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(y^2+x^2-1)}$

d) $f(x,y) = \frac{\ln(2x-y)}{\sqrt{x+2}}$

02-E. Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 2xy + 3x^2 - y^3$

b) $f(x,y) = x\cos(xy^2) + y\,e^{2xy}$

c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}^2(x^2+y) + \frac{z}{y^2}$

d) $f(x,y,z) = xy^2 + 2\sqrt{zx^2} - z^{-1}y^3$

e) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

03-E. Hallar el diferencial total de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x-y}$

b) $f(x,y) = xye^{x^2+y^2}$

c) $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$

04-E. Hallar $\frac{dw}{dt}$ aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas y verificar el resultado por sustitución y derivación, siendo:

a) $w = \operatorname{sen}(xy)$ con $x = e^{3t}$, $y = e^{-t}$

b) $w = xy^2 - x^2$ con $x = e^t$, $y = \operatorname{sen} t$

c) $w = \sqrt{3x+y^2}$ con $x = e^{2t}$, $y = e^t$

d) $w = x^3y + y^2$ con $x = \frac{1}{t}$, $y = t^2 + 1$

e) $w = x^2y + 3xy^4$ con $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

05-E. Utilizando la regla de la cadena, calcular $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$, siendo:

a) $w = 3x^2 - 2xy + y^2$ con $x = 3u + 2v$, $y = 4u - v$

b) $w = x^2y + x$ con $x = u^2 + 3v$, $y = 2u - v^3$

c) $w = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ con $x = u^2 + v^2$, $y = uv$

d) $w = e^{xy^2}$ con $x = u^3$, $y = \sqrt{u} - v^2$

e) $w = \ln(3x^2 + 2y^2)$ con $x = u\cos v$, $y = v\operatorname{sen} u$

06-E. Hallar dy/dx para la función definida implícitamente por:

a) $F(x,y) = e^{2y-x^2} = 0$

b) $F(x,y) = \ln[\operatorname{sen}(2x+y^2)] = 0$

c) $F(x,y) = x^3 + 4xy^2 - y^3 = 0$

07-E. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

a) $F(x,y,z) = x + y - xyz + ze^z = 0$

b) $F(x,y,z) = xy - \ln yz = 0$

c) $F(x,y,z) = 2x^3z - x^2y^2 + 4z^2 + 2xy = 0$

08-E. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} u + v = xy \\ uv + y = x \end{cases}$ Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

09-E. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xe^{u+v} + uv = 1 \\ ye^{u-v} - 2u = 1 \end{cases}$ Calcular $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$

10-E. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} u^2 - v\cos x + w^2 = 0 \\ u^2 - \operatorname{sen} y + 2w = 2 \\ uv - \operatorname{sen} x \cos y = 0 \end{cases}$ Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

01-P. La producción semanal de una planta está dada $Q(x,y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3$ unidades, donde "x" es el número de trabajadores especializados e "y" el número de trabajadores no especializados que se emplean en la planta. Actualmente la planta cuenta con 30 trabajadores especializados y 60 no especializados. Estimar el cambio en la producción semanal que resulta de la adición de un trabajador especializado más si el número de trabajadores no especializados no cambia.

02-P. En un circuito eléctrico simple se tiene una resistencia R y una tensión V $\left(I = \frac{V}{R}\right)$. En un determinado instante V = 80 voltios y crece a razón de 5 V/min, mientras que R es de 40 ohmios y disminuye a razón de 20 Ohm/min. Encontrar la rapidez de variación de la corriente I (ampere).

03-P. Las dimensiones de una caja rectangular varían en función del tiempo. En el instante donde $t = 1$, sus dimensiones son: ancho $x = 1$, largo $y = 2$ y alto $z = 2$. Sabiendo que las tasas de variación del volumen, el área de la base y la superficie total de la caja son respectivamente: $\frac{dV}{dt}(1) = 3$, $\frac{dA}{dt}(1) = 2$ y $\frac{dS}{dt}(1) = 7$. Determinar las tasas de variación de las dimensiones.

----ooo0ooo----