# Ecuaciones diferenciales

Evalúan lo que sucede en el interior del volumen de control

Por lo tanto, se usa un ELEMENTO DIFERENCIAL como volumen de control

Recordar:

**ECUACIONES DE CONSERVACIÓN**

Son ecuaciones de cambio --> Describen las variaciones de las propiedades del fluido con respecto a la posición y al tiempo

# REPASO: Tipos de derivada y operaciones diferenciales con escalares y vectores

- **Derivadas parciales**: se usa cuando se tiene una función de varias variables y se quiere estudiar como cambia la función al variar una sola variable, manteniendo las otras constantes.

  ej. de la densidad con respecto al tiempo t en un **punto fijo** x, y y z $\partial\rho/\partial t$

- **Derivada total**: se usa cuando las variables independientes de una función también dependen de otra variable. Se considera como cambia toda la función con respecto a esa variable, teniendo en cuenta todas las vías de dependencia.

  ej. de la densidad con respecto al tiempo mientras nos desplazamos por dicha corriente con velocidades en las direcciones x, y y z (dx/dt, dy/dt y dz/dt, respectivamente) $\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

- **Derivada sustancial**: Describe el cambio total de una propiedad a lo largo del movimiento de una partícula fluida. Combina la derivada total con el transporte espacial del campo.

  Se usa para describir como cambia una magnitud física a lo largo del tiempo en una partícula en movimiento.

  ej. de la densidad con respecto al tiempo --> cuando el observador "flota" junto con la velocidad v de la corriente y observa los cambios de densidad en función del tiempo. Es una derivada que sigue al movimiento.

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla\rho)$$

- **Gradiente de un campo escalar**: indica cómo y en qué dirección cambia más rápidamente una magnitud escalar en el espacio.

$$\nabla\rho = \mathbf{i}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

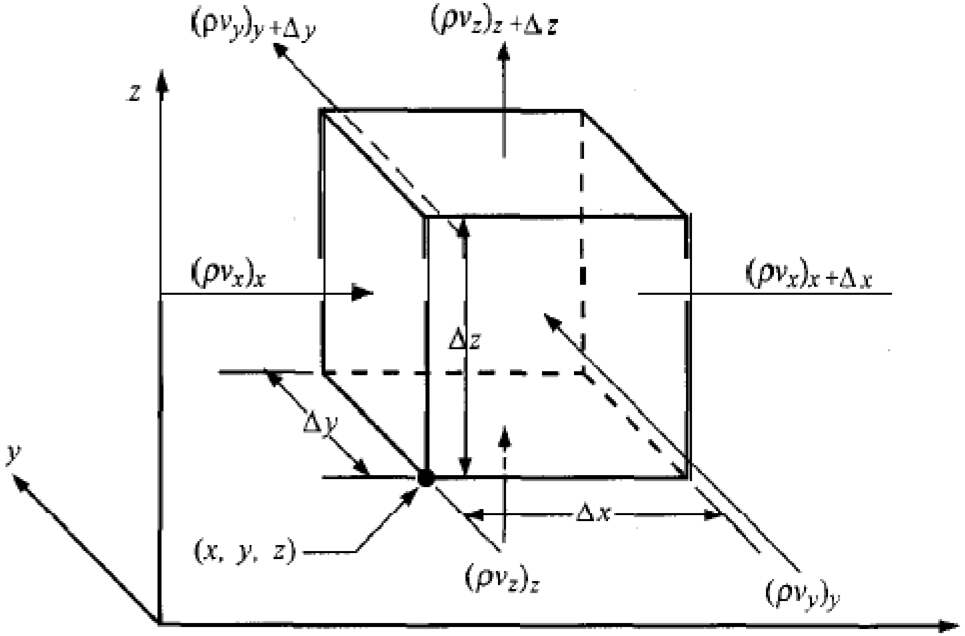
- **Laplaciano de un escalar**: es la divergencia del gradiente de la función. Es la suma de las segundas derivadas parciales respecto a cada variable espacial.

$$\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

- **Divergencia de un vector**: Mide como se expande un campo vectorial desde un punto.

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

# Ecuación diferencial de continuidad




Se parte del **Balance de Masa** para fluido puro que fluye a través de un **elemento de volumen** estacionario (por unidad de volumen):

$$\frac{\left[(\rho v_x)_x - (\rho v_x)_{x+\Delta x}\right]}{\Delta x} + \frac{\left[(\rho v_y)_y - (\rho v_y)_{y+\Delta y}\right]}{\Delta y} + \frac{\left[(\rho v_z)_z - (\rho v_z)_{z+\Delta z}\right]}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

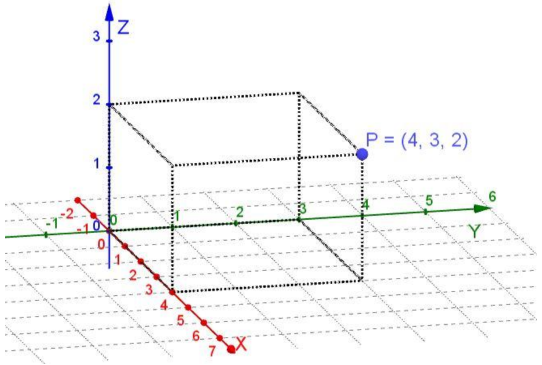
Para el movimiento estacionario de un fluido incompresible: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

$$\boxed{\text{Ecuación de continuidad: } \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Indica la forma en que varía la densidad con el tiempo en un punto fijo, como resultado de los cambios del vector de velocidad de masa

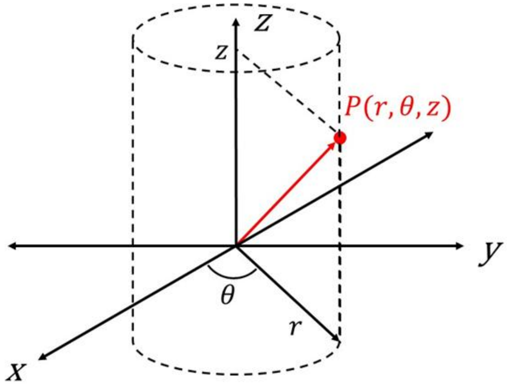
# Ecuación diferencial de continuidad (estado estacionario)

- Coordenadas rectangulares



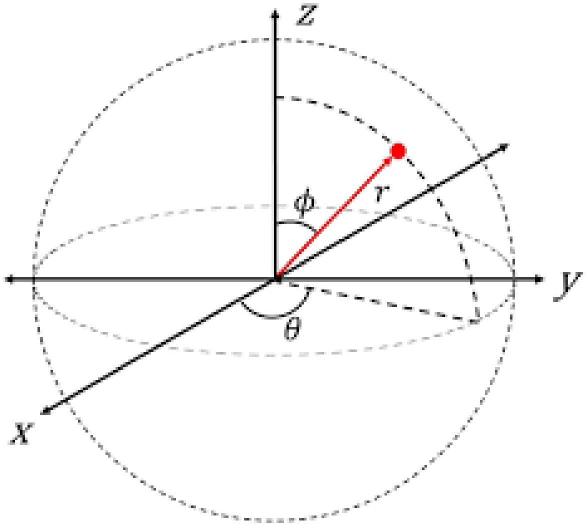

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

- Coordenadas cilíndricas



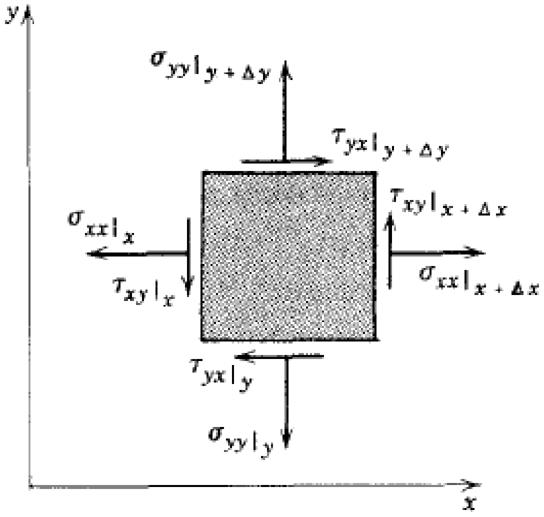

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

- Coordenadas esféricas



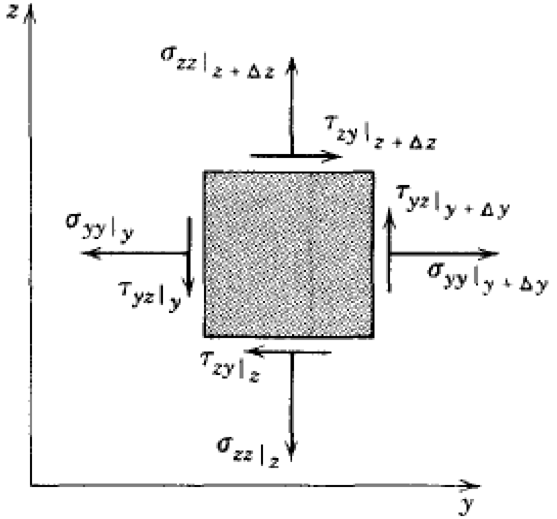

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\ \theta}\frac{\partial(p v_\theta\ \mathrm{sen}\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\ \theta}\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

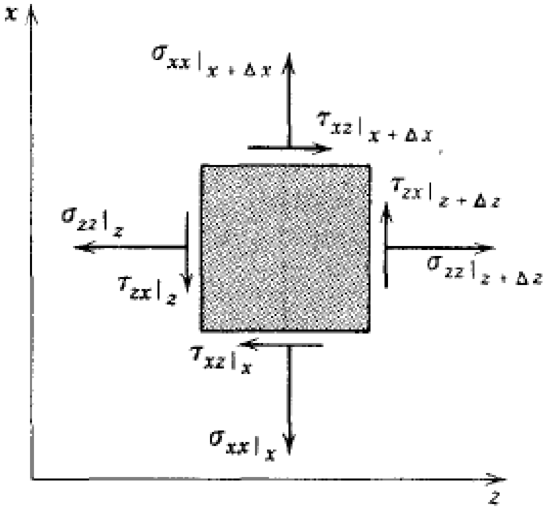
# Ecuación diferencial de transferencia de momento lineal

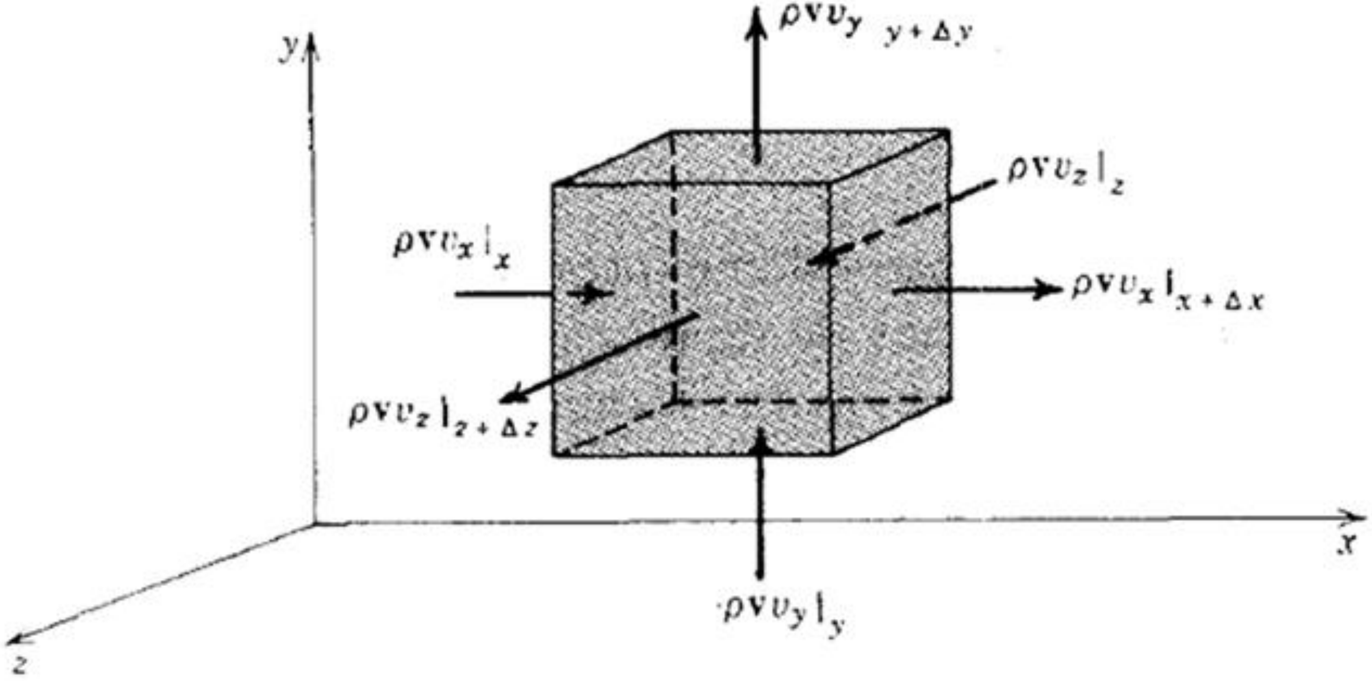



$$\left\{\begin{array}{l}\text{Suma de las fuerzas}\\ \text{externas que actúan}\\ \text{sobre el volumen de}\\ \text{control}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez neta del flujo}\\ \text{de momento, hacia}\\ \text{afuera del volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de}\\ \text{cambio del mo-}\\ \text{mento lineal}\\ \text{dentro del volu-}\\ \text{men de control}\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho\mathbf{v}\, dV}$$



# Ecuación diferencial de transferencia de momento lineal

Flujo laminar

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho\mathbf{v}\, dV$$

Coordenadas rectangulares $\rho\frac{Dv}{Dt} = -(\nabla\cdot\tau) - \nabla p + \rho\mathbf{g}$

Acumulación

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}\right]$$

Entrada-Salida

Esfuerzos cortantes

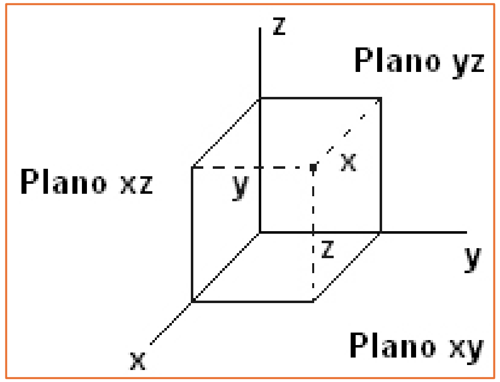
$$-\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_z$$

Fuerza de presión neta

Fuerza gravitacional

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{at} = \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial_y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial_z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$




$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

# ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO PARA FLUIDOS CON DENSIDAD Y VISCOSIDAD VARIABLES

(ecuaciones anteriores bajo estas condiciones)

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Se obtienen ecuaciones semejantes para las componentes y y z del momento lineal.

# ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA FLUIDOS NEWTONIANOS E INCOMPRESIBLES

(VISCOSIDAD Y DENSIDAD CONSTANTES)

## ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

- Conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (la aceleración del fluido no es proporcional a la fuerza que se le aplica) que describen el movimiento de fluidos (en régimen laminar).

- Derivan de la Segunda Ley de Newton, junto con el supuesto de tensión viscosa.

- Representan la conservación del momento del fluido, que describe su movimiento y es afectado por fuerzas como la presión, la gravedad y la viscosidad.

- Proporcionan un modo preciso de calcular como se mueven los fluidos.
- Junto con la ecuación de continuidad expresan la conservación de masa del fluido.

Ecuación de continuidad: $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Ecuación de continuidad para estado estacionario: $\nabla (\rho . \vec{V}) = 0$

Ecuación de continuidad para estado estacionario y fluido incompresible ($\rho$ constante): $\nabla . \vec{V} = 0$

# ECUACIONES DE NAVIER-STOKES: Deducción

$$\sum F = m\,a$$

$$\frac{\sum F}{v} = \frac{ma}{v} \implies \frac{\sum F}{v} = \rho a$$

$$\frac{\sum F}{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho g$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

PARA:

- Fluido Newtoniano
- Flujo incompresible
- Régimen Laminar

$$\overbrace{\rho}^{\text{MASA densidad del fluido}} \overbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Cambio en la velocidad con el tiempo}} + \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V}}_{\text{La velocidad y dirección en que se mueve el fluido}}\right]}^{\text{ACELERACIÓN como una velocidad experimentada por una partícula cambia con el tiempo}} = \overbrace{\underbrace{-\vec{\nabla} P}_{\text{Gradiente de presión interna en el fluido (el cambio de presión)}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\text{Fuerzas de Tensión internas que actúan sobre el fluido (teniendo en cuenta los efectos viscosos)}} + \underbrace{\rho g}_{\text{Fuerzas externas que actúan sobre el fluido (como la gravedad)}}}^{\text{FUERZA todas las fuerzas que actúan sobre el fluido}}$$

# Ecuación de Navier-Stokes

$$\overbrace{\rho}^{\substack{\textbf{MASA}\\ \text{densidad}\\ \text{del fluido}}}\ \overbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\substack{\text{Cambio en la}\\ \text{velocidad con}\\ \text{el tiempo}}} + \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{V}}_{\substack{\text{La velocidad y}\\ \text{dirección en que}\\ \text{se mueve el fluido}}}\right]}^{\substack{\textbf{ACELERACIÓN}\\ \text{como una velocidad}\\ \text{experimentada por una}\\ \text{partícula cambia con el tiempo}}} = \overbrace{\underbrace{-\vec{\nabla}P}_{\substack{\textbf{Gradiente de}\\ \textbf{presión interna}\\ \text{en el fluido}\\ \text{(el cambio de}\\ \text{presión)}}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\substack{\textbf{Fuerzas de}\\ \textbf{Tensión internas}\\ \text{que actúan sobre}\\ \text{el fluido}\\ \text{(teniendo en}\\ \text{cuenta los}\\ \text{efectos viscosos)}}} + \underbrace{\rho g}_{\substack{\textbf{Fuerzas}\\ \textbf{externas}\\ \text{que actúan}\\ \text{sobre el fluido}\\ \text{(como}\\ \text{la gravedad)}}}}^{\substack{\textbf{FUERZA}\\ \text{todas las fuerzas que}\\ \text{actúan sobre el fluido}}}$$

**Gradiente de Presión**
Los fluidos tienden a seguir
la dirección donde existe
el mayor cambio de presión

**Termino que representa la fuerzas que interactúan**
Fuerzas externas, como la
gravitacional, que actúan en el fluido

**Densidad del fluido**

$$\rho\,\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu\nabla^2\vec{V} + \rho g$$

**Derivada Total**
Representa el cambio de
velocidad con respecto al tiempo

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{V}\right]$$

**Termino que representa la difusión**
En los fluidos newtonianos la viscosidad
opera como difusión del momento

PARA FLUJO NO VISCOSO:

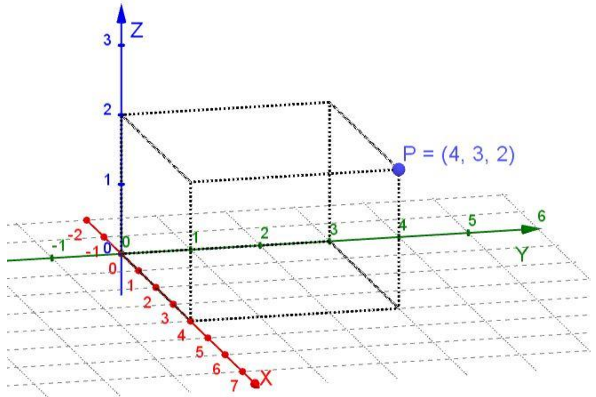
(Efectos viscosos despreciables)

$\mu = 0$

**ECUACION DE EULER**

$$\rho\,\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho g$$

# ECUACIONES DE NAVIER-STOKES




## Ecuación del movimiento en coordenadas rectangulares

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z$$

aceleración

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p+\rho\mathbf{g}+\mu\nabla^2\mathbf{v}}$$

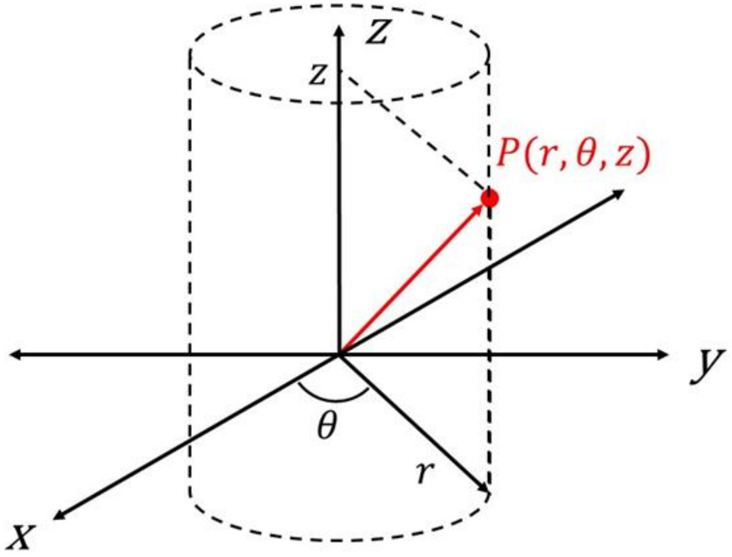
$$\rho\frac{D\vec{V}_x}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_y}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_z}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

# ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

## Ecuación del movimiento en coordenadas cilíndricas




$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

Fuerza centrifuga

$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

Fuerza de Coriolis

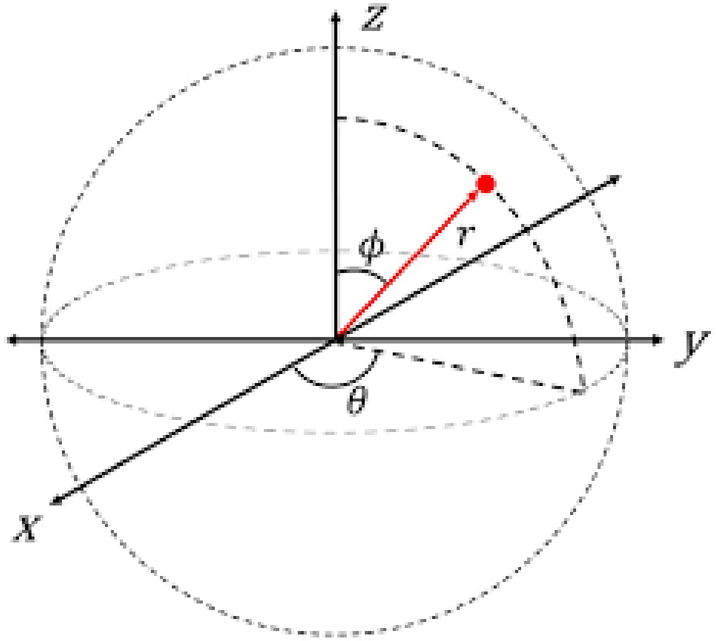
$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$$

# ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

**Ecuación del movimiento en coordenadas esféricas**




$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\ \cot\,\theta-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\,\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\,\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta\,v_\phi}{r}\cot\,\theta\right)=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\,\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)+\rho g_\phi=$$