Ecuaciones diferenciales

Evalúan lo que sucede en el interior del volumen de control

Por lo tanto, se usa un ELEMENTO DIFERENCIAL como volumen de control

Recordar:

ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Son ecuaciones de cambio --> Describen las variaciones de las propiedades del fluido con respecto a la posición y al tiempo

Tipos de derivada y operaciones diferenciales con escalares y vectores (repaso)

- **Derivadas parciales**: ej. de la densidad con respecto al tiempo t en un **punto fijo** x, y y z $\partial\rho/\partial t$.
- **Derivada total**: ej. de la densidad con respecto al tiempo mientras nos desplazamos por dicha corriente con velocidades en las direcciones x, y y z (dx/dt, dy/dt y dz/dt, resp

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

- **Derivada sustancial**: ej. de la densidad con respecto al tiempo --> cuando el observador "flota" junto con la velocidad v de la corriente y observa los cambios de densidad en función del tiempo. Es una derivada que sigue al movimi

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\rho)$$

- **Gradiente de un campo escala** $\nabla\rho = \mathbf{i}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\rho}{\partial z}$
- **Laplaciano de un escalar** $\nabla^2\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}$
- **Divergencia de un vectoi** $(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

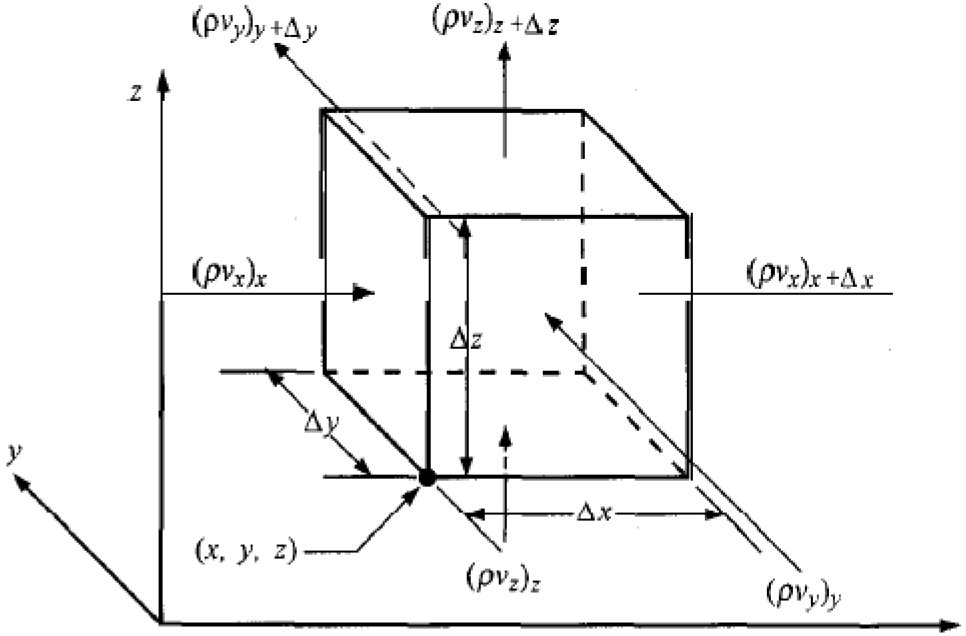
Otras operaciones que conviene tener presentes, son:

$$\nabla rs = r\nabla s + s\nabla r$$

$$(\nabla\cdot s\mathbf{v}) = (\nabla s\cdot\mathbf{v}) + s(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla s) = v_x\frac{\partial s}{\partial x} + v_y\frac{\partial s}{\partial y} + v_z\frac{\partial s}{\partial z}$$

Ecuación diferencial de continuidad



Se parte del Balance de Masa para fluido puro que fluye a través de un elemento de volumen estacionario:

$$\frac{\left[(\rho v_x)_x - (\rho v_x)_{x+\Delta x}\right]}{\Delta x} + \frac{\left[(\rho v_y)_y - (\rho v_y)_{y+\Delta y}\right]}{\Delta y} + \frac{\left[(\rho v_z)_z - (\rho v_z)_{z+\Delta z}\right]}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\boxed{\text{Ecuación de continuidad: } \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Indica la forma en que varía la densidad con el tiempo en un punto fijo, como resultado de los cambios del vector de velocidad de masa

Para el movimiento estacionario de un fluido incompresible: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

Ecuación diferencial de continuidad (estado estacionario)

- Coordenadas rectangulares

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

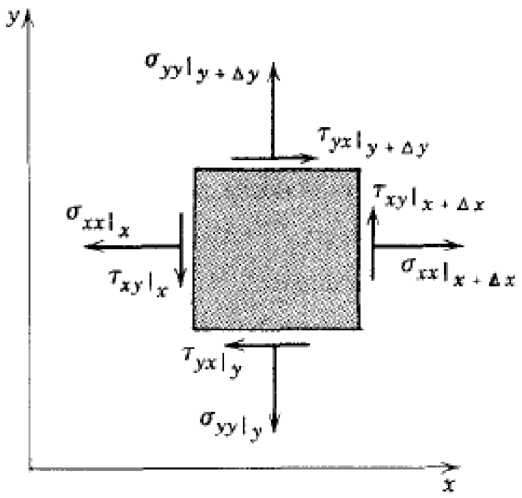
- Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

- Coordenadas esféricas

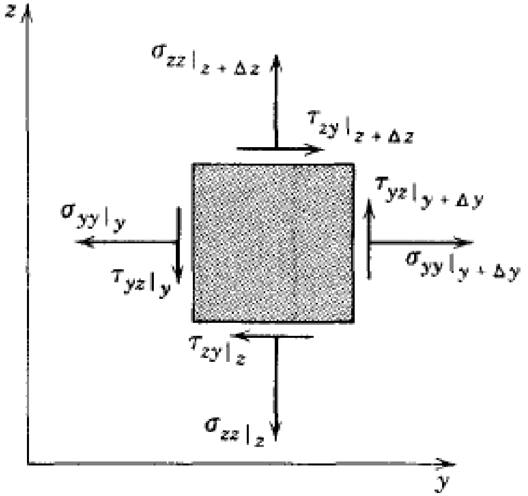
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(p v_\theta\ \mathrm{sen}\,\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\ \theta}\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

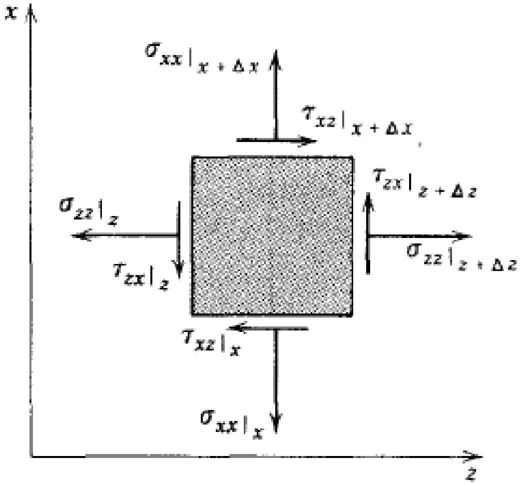
Ecuación diferencial de transferencia de momento lineal

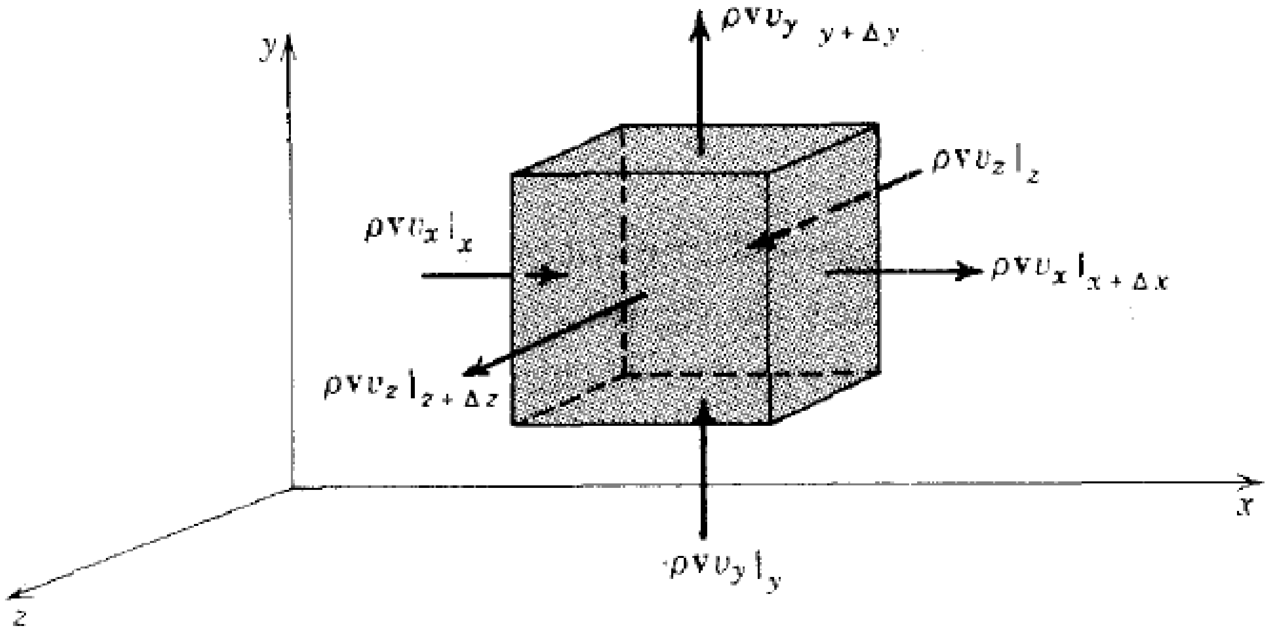


$$\left\{\begin{array}{l}\text{Suma de las fuerzas}\\\text{externas que actúan}\\\text{sobre el volumen de}\\\text{control}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez neta del flujo}\\\text{de momento, hacia}\\\text{afuera del volumen}\\\text{de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de}\\\text{cambio del mo-}\\\text{mento lineal}\\\text{dentro del volu-}\\\text{men de control}\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho\mathbf{v}\, dV}$$







Ecuación diferencial de transferencia de momento lineal

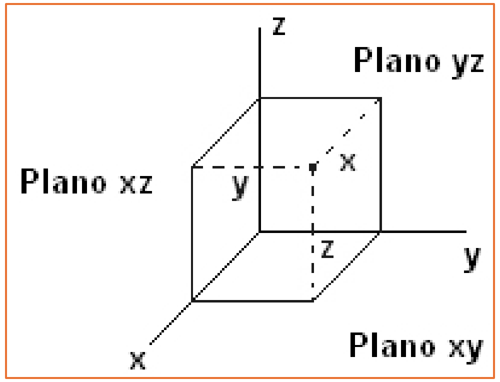
- Coordenadas rectangulares $\rho \frac{Dv}{Dt} = -(\nabla \cdot \tau) - \nabla p + \rho \mathbf{g}$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) - \frac{\cdot}{\partial y} + \rho g_z$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{at} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$



$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

Ecuación del movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad variables

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Se obtienen ecuaciones semejantes para las componentes y y z del momento lineal.

Ecuaciones del movimiento para **fluidos newtonianos** con **densidad y viscosidad constantes**

Cuando la densidad y la viscosidad son constantes donde (V . v) = 0, las ecuaciones se simplifican --> **Ecuaciones de Navier-Stokes**.

Ecuación del movimiento en coordenadas rectangulares

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z$$

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p+\rho\mathbf{g}+\mu\nabla^2\mathbf{v}}$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_x}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_y}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\frac{D\vec{V}_z}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

Ecuación de Navier-Stokes

MASA densidad del fluido

ACELERACIÓN como una velocidad experimentada por una partícula cambia con el tiempo

FUERZA todas las fuerzas que actúan sobre el fluido

$$\overbrace{\rho}^{\text{MASA}}\overbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Cambio en la velocidad con el tiempo}} + \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{V}}_{\text{La velocidad y dirección en que se mueve el fluido}}\right]}^{\text{ACELERACIÓN}} = \overbrace{\underbrace{-\vec{\nabla}P}_{} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{} + \underbrace{\rho g}_{}}^{\text{FUERZA}}$$

Cambio en la velocidad con el tiempo

La velocidad y dirección en que se mueve el fluido

Gradiente de presión interna en el fluido (el cambio de presión)

Fuerzas de Tensión internas que actúan sobre el fluido (teniendo en cuenta los efectos viscosos)

Fuerzas externas que actúan sobre el fluido (como la gravedad)

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu\nabla^2\vec{V} + \rho g$$

Densidad del fluido

Gradiente de Presión
Los fluidos tienden a seguir la dirección donde existe el mayor cambio de presión

Termino que representa la fuerzas que interactúan
Fuerzas externas, como la gravitacional, que actúan en el fluido

Derivada Total
Representa el cambio de velocidad con respecto al tiempo

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{V}\right]$$

Termino que representa la difusión
En los fluidos newtonianos la viscosidad opera como difusión del momento

Ecuaciones del movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad constantes

Ecuación del movimiento

en coordenadas cilíndricas

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$$

Ecuaciones del movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad constantes

Ecuación del movimiento en coordenadas esféricas

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_0^2+v_\phi^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\,\cot\,\theta-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\,\cot\,\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta\,v_\phi}{r}\cot\,\theta\right)=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}$$

$$+\mu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)+\rho g_\phi=$$