TP N° 4
ANÁLISIS DIMENSIONAL

Fenómenos de Transporte

Ingeniería Química

Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Jujuy

MAGNITUDES FUNDAMENTALES	
LONGITUD	L
TIEMPO	t
MASA	M
FUERZA (F)	F
TEMPERATURA	T
CANTIDAD DE SUSTANCIA	mol
INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	A
INTENSIDAD DE CORRIENTE LUMINOSA	Cd

F = (m.a) / gc

Sistema de magnitudes ingenieriles

Sistema de magnitudes absolutas (terreno científico)

MAGNITUDES FUNDAMENTALES	
LONGITUD	L
TIEMPO	t
MASA	M
FUERZA (F)	F
TEMPERATURA	T
CANTIDAD DE SUSTANCIA	mol
INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	A
INTENSIDAD DE CORRIENTE LUMINOSA	Cd

Sistema de magnitudes técnicas (terreno técnico)

SISTEMAS DE UNIDADES

1 kg fuerza < > 9,81 newton < > $(9{,}81)(10^5)$ dinas
1 lb fuerza < > 32,17 poundals
1 U.T.M. < > 9,81 kg masa
1 slug < > 32,17 lb masa

Sist. de unid. Absolutos

Magnitudes fundamentales	Cegesimal (C.G.S.)	Práctico o de Giorgi (M.K.S.)	Inglés (F.P.S.)
L	cm	m	ft
t	s	h o s	h o s
M	g	kg	lb
F	dyn	N	Poundal
E	erg	J	Poundal.ft
T	°C	°C	°F

$M.L.t^{-2}$

F.L

Sist. de unid. Técnicos

Magnitudes fundamentales	Sist. Técn. métrico	Sist. Técn. inglés	Sist. Ing. métrico	Sist. Ing. inglés
L	m	ft	m	ft
t	h o s	h o s	h o s	h o s
M	1 U.T.M = 1 $kgf.s^2.m^{-1}$	1 slug = 1 $lbf.s^2ft^{-1}$	kg	lb
F	kgf	lbf	kgf	lbf
T	°C	°F	°C	°F
Factor conversión	-	-	gc = 9.81 $kg.m/kgf.s^2$	gc = 32.17 $lb.ft/lbf.s^2$

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

MAGNITUD	SÍMBOLO
LONGITUD	m
MASA	kg
TIEMPO	s
TEMPERATURA	K
INTENSIDAD DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA	A
INTENSIDAD LUMINOSA	Cd
CANTIDAD DE SUSTANCIA	mol
ÁNGULO PLANO	rad
ÁNGULO SÓLIDO	sr

Fundamentales

Suplementarias

Adicional

tonelada:	$1\ \mathrm{t} <> 10^{3}\ \mathrm{kg}$
litro:	$1\ \mathrm{l} <> 10^{-3}\ \mathrm{m}^{3}$
bar:	$1\ \mathrm{bar} <> 10^{5}\ \mathrm{N/m^{2}}$
angstrom:	$1\ \mathrm{\AA} <> 10^{-10}\ \mathrm{m}$
micra:	$1\ \mathrm{micra} <> 10^{-6}\ \mathrm{m}$
poise:	$1\ \mathrm{poise} <> 10^{-1}\ \mathrm{kg/(m \cdot s)}$
centipoise:	$1\ \mathrm{centipoise} <> 10^{-3}\ \mathrm{kg/(m \cdot s)}$

Factor por el que ha de multiplicarse la unidad	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

MAGNITUDES DERIVADAS

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo	Expresión en función de las unidades fundamentales o derivadas
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hercio	Hz	$(=s^{-1})$
Número de onda	1 por metro	m^{-1}	
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radiante por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo por segundo	m/s^2	
Aceleración angular	radiante por segundo por segundo	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	$(=kg \cdot m/s^2)$
Presión (tensión mecánica)	newton por metro cuadrado*	N/m^2	
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
Viscosidad dinámica	kilogramo por metro por segundo	$kg/m \cdot s$	$(=N \cdot s/m^2)$
Trabajo, energía, cantidad de calor	julio	J	$(=N \cdot m)$
Entropía	julio por kelvin	J/K	
Calor másico	julio por kilogramo por kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
Potencia	vatio	W	$(=J/s)$
Conductividad térmica	vatio por metro por kelvin	$W/(m \cdot K)$	
Intensidad energética	vatio por estereorradiante	W/sr	
Cantidad de electricidad	culombio	C	$(=A \cdot s)$
Tensión eléctrica, diferencia de potencial, fuerza electromotriz	voltio	V	$(=W/A)$
Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro	V/m	
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	$(=V/A)$
Capacidad eléctrica	faradio	F	$(=A \cdot s/V)$
Flujo de inducción magnética	weber	Wb	$(=V \cdot s)$
Inductancia	henrio	H	$(=V \cdot s/A)$
Inducción magnética	tesla	T	$(=Wb/m^2)$
Intensidad de campo magnético	amperio por metro	A/m	
Fuerza magnetomotriz	amperio	A	
Flujo luminoso	lumen	lm	$(=cd \cdot sr)$
Luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
Iluminancia	lux	lx	$(=lm/m^2)$
Actividad (de un manantial radiactivo)	1 por segundo	s^{-1}	

CONCEPTOS IMPORTANTES

- Factor de conversión de unidades: número de unidades de una magnitud de un sistema de unidades contenidas en una unidad de la misma magnitud de otro sistema de unidades.

- Ecuaciones homogéneas (punto de vista dimensional): todos los términos de la ecuación tienen las mismas dimensiones (unidades coherentes).

- Razones adimensionales: se obtienen si se dividen todos los términos de la ecuación homogénea por uno de sus miembros.

- Ecuaciones dimensionalmente heterogéneas (experimentación).

ANÁLISIS DIMENSIONAL

CONCEPTO DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL: instrumento matemático que, conocidas las variables implicadas en un fenómeno, permite agruparlas en un reducido número de razones o números adimensionales.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL, según BRIDGMAN:

1.Todas las magnitudes físicas pueden expresarse como funciones de un reducido número de magnitudes fundamentales.

2. Las ecuaciones que relacionan las magnitudes físicas son homogéneas.

3.Si una ecuación es dimensionalmente homogénea, puede reducirse a una relación entre una serie completa de razones o números adimensionales --> TEOREMA π DE BUCKINGHAM

SERIE DE NÚMEROS ADIMENSIONALES COMPLETA: cuando todos los números adimensionales son independientes entre sí: $\boxed{i = n - j}$

j: característica de la matriz formada por los exponentes a que están elevadas las magnitudes fundamentales en las ecuaciones dimensionales de las variables y constantes con relación a un determinado sistema de unidades.

Suponiendo que π1, π2, …, πi constituyen la serie completa de razones adimensionales que pueden formarse con las variables y constantes dimensionales que influyen en cierto fenómeno, el teorema π de Buckingham se expresa: $\boxed{f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i) = 0}$

MÉTODOS DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

- ✓ **MÉTODO DE BUCKINGHAM**
- ✓ **MÉTODO DE RAYLEIGH**

Agrupan en razones o números adimensionales un cierto número de variables y constantes dimensionales que se SUPONE influyen en un fenómeno determinado.

- ✓ **MÉTODO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES**

Parte de ecuaciones diferenciales de conservación de la materia, de la cantidad de movimiento, y energía.

MÉTODO DE BUCKINGHAM

1. Se establecen las variables que influyen en el fenómeno.
2. Se formulan las ecuaciones dimensionales de todas las variables y constantes (en el S.U. elegido).
3. Si hay variables con iguales dimensiones, se tiene en cuenta solo UNA para el análisis; añadiendo al final, a los grupos adimensionales que resulten, las RAZONES ADIMENSIONALES a que conduzcan los coeficientes de las restantes variables. *FACTORES DE FORMA: razones adimensionales adicionales (w1, w2, ….).
4. Se forma la matriz de los exponentes a que quedan afectadas las magnitudes fundamentales en las ec. dimensionales de las variables y constantes.
5. Se determina la característica "j" de la matriz.
6. Formar los "i" grupos adimensionales independientes (i = n - j): a cada **producto de j** variables y constantes dimensionales, **elevados a exponentes a determinar**, se añaden como **factores cada una de las n-j variables restantes elevadas al exponente unidad** →

$$\pi 1 = X1^{a1}.X2^{b1}.X3^{c1},\dots,\ Xj^{p1}.\ Xj+1$$
$$\pi 2 = X1^{a2}.X2^{b2}.X3^{c2},\dots,\ Xj^{p2}.\ Xj+2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\pi i = X1^{ai}.X2^{bi}.X3^{ci},\dots,\ Xj^{pi}.\ Xj+i$$

7. Las series de exponentes (a1, b1, c1,…,p1; ….; ai, bi, ci,…,pi) deben ser tales

   que los grupos π1, π2, …. πi sean adimensionales --> ecuaciones de

condición de todas las magnitudes fundamentales en cada razón: **ecuaciones = incógnitas** (exponentes).

1. Formular el Teorema π de Buckingham: $f(\pi 1, \pi 2, \dots, \pi i) = 0$

MÉTODO DE RAYLEIGH

1. Se establecen las variables que influyen en el fenómeno.
2. Se expresa una de las variables (la de mayor interés) como función potencial de las demás y constantes dimensionales: $X1 = K.\ X2^{a2}.X3^{a3}...\ Xn^{an}$
3. Sustituir las magnitudes del punto anterior por sus dimensiones.

   Establecer las ecuaciones de condiciones de homogeneidad para cada una de las unidades fundamentales.

4. Si el sistema de ecuaciones elegido tiene p magnitudes fundamentales, las ecuaciones de condición del paso anterior constituyen un sistema de **p ecuaciones** con **(n-1) incógnitas** como máximo.

Se eligen (n - 1 - p) exponentes o incógnitas y se resuelve el sistema indicado para **encontrar el valor de los "p" exponentes restantes en función de los elegidos**.

5. Los valores de p exponentes del paso anterior se sustituyen en la función y se agrupan las magnitudes elevadas a los mismos exponentes.

Resultará una razón adimensional elevada al exponente unidad y **(n - 1 - p)** razones adimensionales cada una elevada a uno de los exponentes elegidos. Por lo tanto, se llegará a las razones adimensionales buscadas:

$$\pi 1 = f(\pi 2, \pi 3, \dots, \pi i)$$

MÉTODO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Éste método parte de las ecuaciones diferenciales de conservación de materia, cantidad de movimiento y energía; y tiene en cuenta las condiciones límites --> Es poco probable que se omitan variables relevantes.

Las ecuaciones de conservación son homogéneas dimensionalmente --> si se dividen todos los términos por uno cualquiera de ellos, resultan tantas razones adimensionales independientes como **términos - 1**.

Se puede apreciar el significado físico de cada una de las razones obtenidas.

Cantidad de movimiento	Energía	Materia
	[3.22] $\frac{\text{I} + \text{II}}{\text{II}} = \frac{h\Delta T/L}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. conv. y cond. cal.}}{\text{Corr. cond. calor}}$ N.º de Nusselt $Nu = \frac{hL}{k}$	[3.23] $\frac{\text{I} + \text{II}}{\text{II}} = \frac{k_A\Delta\rho_A/L}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. conv. y dif. } A}{\text{Corr. dif. } A}$ N.º de Nusselt másico $Nu_{AB} = \frac{k_A L}{D_{AB}}$
	[3.22] $\frac{\text{I} + \text{II}}{\text{I}} = \frac{h\Delta T/L}{\text{I}}$ $\frac{\text{Corr. conv. y cond.}}{\text{Corr. conv. calor}}$ N.º de Stanton $St = \frac{h}{\rho c_p V} = \frac{Nu}{Pe}$	[3.23] $\frac{\text{I} + \text{II}}{\text{I}} = \frac{k_A\Delta\rho_A/L}{\text{I}}$ $\frac{\text{Corr. conv. y dif. } A}{\text{Corr. conv. } A}$ N.º de Sherwood $Sh = \frac{k_A}{V} = \frac{Nu_{AB}}{Pe_{AB}}$
[3.21] $\frac{\text{I}}{\sigma_s/L^2}$ $\frac{\text{F. inercia}}{\text{F. tens. superf.}}$ N.º de Weber $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_s}$	[3.22] $\frac{\text{I}}{\sigma\varepsilon T^4/L}$ $\frac{\text{Corr. conv. calor}}{\text{Corr. rad. calor}}$ N.º de Thring $Th = \frac{\rho c_p V}{\sigma\varepsilon T^3}$	
	$\frac{\text{Temp. emisor}}{\text{Temp. receptor}}$ Razón de temperaturas $rT = \frac{T_e}{T_r}$	

* Se representa la tensión superficial por σ_s a fin de diferenciarla de la constante de la ley de Stephan-Boltzmann σ que figura en el número de Thring.

TABLA 3.14. *Grupos adimensionales*

Cantidad de movimiento	Energía	Materia
[3.21] $\frac{\text{I}}{\text{II}}$ $\frac{\text{F. inercia}}{\text{F. rozamiento}}$ N.º de Reynolds $Re = \frac{VL\rho}{\mu}$	[3.22] $\frac{\text{I}}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. conv. calor}}{\text{Corr. cond. calor}}$ N.º de Peclet $Pe = \frac{\rho c_p VL}{k}$	[3.23] $\frac{\text{I}}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. conv. } A}{\text{Corr. dif. } A}$ N.º de Peclet másico $Pe_{AB} = \frac{VL}{D_{AB}}$
[3.21] $\frac{\text{III}_1}{\text{I}}$ $\frac{\text{F. de presión}}{\text{F. de inercia}}$ N.º de Euler $Eu = p/\rho V^2$	$\frac{[3.22]\ \text{I/II}}{[3.21]\ \text{I/II}} = \frac{Pe}{Re}$ N.º de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p\mu}{k}$	$\frac{[3.23]\ \text{I/II}}{[3.21]\ \text{I/II}} = \frac{Pe_{AB}}{Re}$ N.º de Schmidt $S_C = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$
[3.21] $\frac{\text{I}}{\text{III}_2}$ $\frac{\text{F. de inercia}}{\text{F. de gravedad}}$ N.º de Froude $Fr = \frac{V^2}{Lg}$	[3.22] $\frac{\text{III}_2}{\text{I}}$ $\frac{\text{Corr. calor r. quim.}}{\text{Corr. conv. calor}}$ N.º de Damköhler III $Da_{III} = \frac{\bar{h}_{AB} r_A L}{\rho c_p V T}$	[3.23] $\frac{\text{III}_2}{\text{I}}$ $\frac{\text{Corr. } A \text{ reac. q.}}{\text{Corr. conv. } A}$ N.º de Damköhler I $Da_I = \frac{r_A \cdot L}{V\rho_A}$
[3.21] $\frac{\text{I}}{\text{II}}\frac{\text{III}_3}{\text{II}}$ $\frac{\text{(F. iner.)(F. conv. térm.)}}{\text{(F. de rozam.)}^2}$ N.º de Grashof $Gr = \frac{\rho^2 L^3 g\bar{\beta}\Delta T}{\mu^2}$	[3.22] $\frac{\text{III}_2}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. calor r. quim.}}{\text{Corr. cond. calor}}$ N.º de Damköhler IV $Da_{IV} = \frac{\bar{h}_{AB} r_A L^2}{kT} = \frac{Da_{III}}{Pe}$	[3.23] $\frac{\text{III}_2}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. } A \text{ reac. q.}}{\text{Corr. dif. } A}$ N.º de Damköhler II $Da_{II} = \frac{r_A L^2}{D_{AB}\rho_A} = \frac{Da_I}{Pe_{AB}}$
[3.21] $\frac{\text{I}}{\text{II}}\frac{\text{III}_4}{\text{II}}$ $\frac{\text{(F. iner.)(F. conv. conc.)}}{\text{(F. de rozam.)}^2}$ N.º de Grashof de conc. $Gr_{AB} = \frac{\rho^2 L^3 g\zeta_A \Delta\rho_A}{\mu^2}$	[3.22] $\frac{\text{III}_4}{\text{II}}$ $\frac{\text{Corr. disip. ener.}}{\text{Corr. cond. calor}}$ N.º de Brinkman $Br = \frac{\mu V^2}{kT}$	