

# Operaciones Unitarias 1

## Interacción sólido -fluido

## Evaluación de propiedades termofísicas de suspensiones (*slurry*), densidad y viscosidad

Una suspensión (*slurry*) consiste en partículas finamente divididas mezcladas con un líquido. Sus propiedades dependen de sus constituyentes.

Si se define:

$\rho_p$  kg.m<sup>-3</sup> : densidad de las partículas sólidas en la suspensión  $m_p/V_p$

$\rho_f$  kg.m<sup>-3</sup> : densidad del fluido  $m_f/V_f$

$C_w$  : concentración en masa ,  $m_p/(m_p + m_f) = m_p/m_{slurry}$

$C_v$  ,  $\phi$ : concentración en volumen sólido o fracción volumétrica sólido,  $V_p/(V_p + V_f) = V_p/V_{slurry}$

$\varepsilon$  (1 -  $C_v$ ), (1 -  $\phi$ ) : porosidad concentración en volumen fluido o fracción volumétrica fluido,  $V_f/(V_p + V_f) = V_f/V_{slurry}$

$\phi/(1 - \phi)$ : relación de volumen,  $V_p/V_f$

$\rho_{sl}$ , kg.m<sup>-3</sup> : densidad de la suspensión  $(m_p + m_f)/(V_p + V_f) = m_{slurry}/V_{slurry}$

$\mu_f$ ,  $\mu_{slurry}$ ,  $cP$ : viscosidad del fluido, de la suspensión

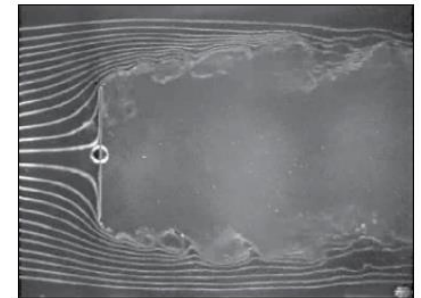
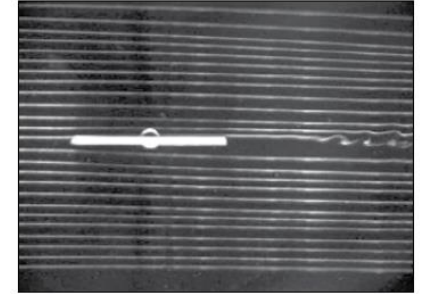
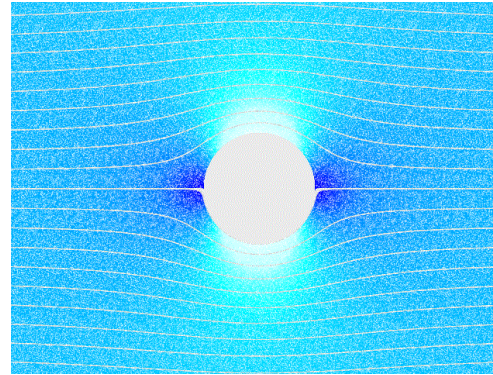
Entonces:

$$\rho_{sl} = \left[ \frac{C_w}{\rho_p} + \frac{(1 - C_w)}{\rho_f} \right]^{-1} \quad C_v = C_w \frac{\rho_{sl}}{\rho_p} \frac{m_p}{m_{slurry}} \frac{m_{slurry}}{V_{slurry}} \frac{V_p}{m_p}$$

$$\mu_{slurry} = \mu_f [1 + 2,5\phi + 10,05\phi^2 + 0,00273e^{16,6\phi}] \quad \text{Correlación de Thomas}$$

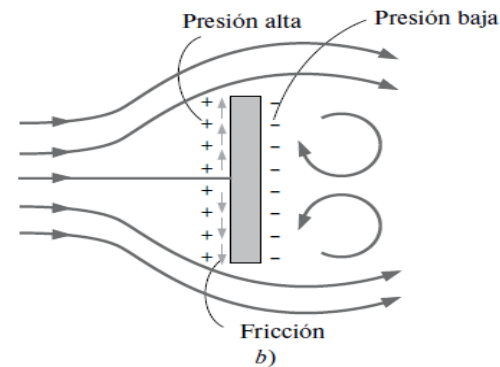
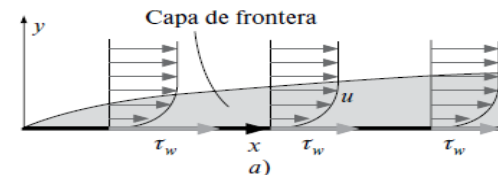
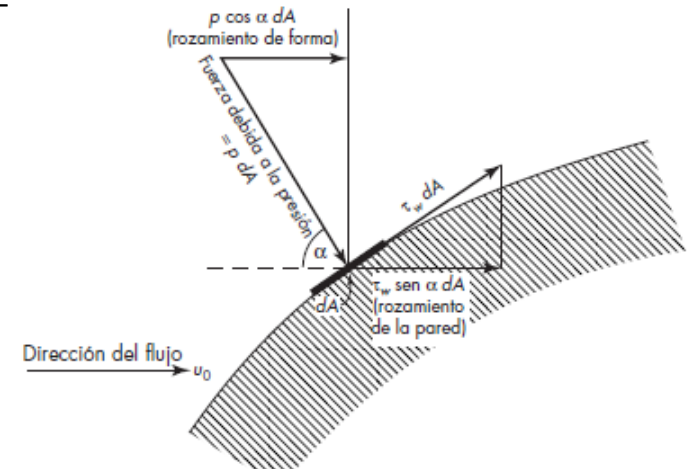
# Movimiento de partículas en un fluido Interacciones Fluido – Partícula

- *Flujo externo*: el flujo alrededor de cuerpos que están inmersos en un fluido; fuerzas resultantes: de sustentación (*Lift*) y arrastre (*Drag*).
- Los efectos viscosos están confinados a una porción del campo de flujo, como las capas límite y las estelas, que están rodeadas por una región externa de flujo caracterizada por bajos gradientes de velocidad y temperatura.



# Movimiento de partículas en un fluido Interacciones Fluido –

- Cuando un fluido se mueve sobre un cuerpo sólido, ejerce fuerzas de presión normales a la superficie, ( $PdA$ ) y fuerzas cortantes paralelas a la superficie del cuerpo ( $\tau_w dA$ ).
- La componente resultante de la presión y de las fuerzas cortantes **que actúa en la dirección del flujo**  $PdA \cos \alpha + \tau_w dA \sin \alpha$  se llama *fuerza de arrastre*,  $F_D$ , (o simplemente *arrastre*), y la componente que actúa en dirección normal a la del flujo se llama *fuerza de sustentación* (o simplemente *sustentación*).



Flujo en una placa plana: a) placa paralela a flujo: sólo interviene el esfuerzo cortante b) placa perpendicular a flujo: sólo interviene la fuerza de presión



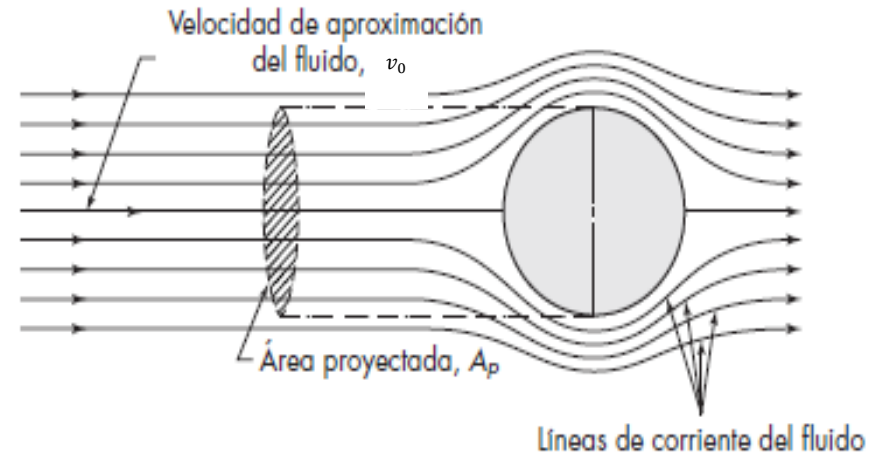
Una esfera lisa se encuentra sumergida en un fluido en movimiento y considerar que, a una distancia suficiente medida desde el punto de estancamiento, la corriente se aproxima a una velocidad uniforme,  $v_0$ .

Se define como el área proyectada  $A_p$  al área que se obtiene al proyectar el cuerpo sobre un plano perpendicular a la dirección de flujo.

Para una **esfera**,  $A_p = \frac{\pi D_p^2}{4}$ ;  $D_p$  es el diámetro de la esfera

Se define el número de Reynolds de partícula  $Re_p$  :

$$Re_p = \frac{\rho v_0 D_p}{\mu} = \frac{G_0 D_p}{\mu} \quad \text{donde } G_0 \left[ \frac{kg}{s.m^2} \right] \text{ es la velocidad masa.}$$



# Movimiento de partículas en un fluido Interacciones Fluido - Partícula



Fuerza de arrastre total  $F_D$  (drag force)

Se define el coeficiente de arrastre  $C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2}$   $C_D = C_{D,friccion} + C_{D,presión} \rightarrow F_D = C_D \rho \frac{v_0^2}{2} A_p$

Para una esfera  $C_D = \phi(Re_p)$ .

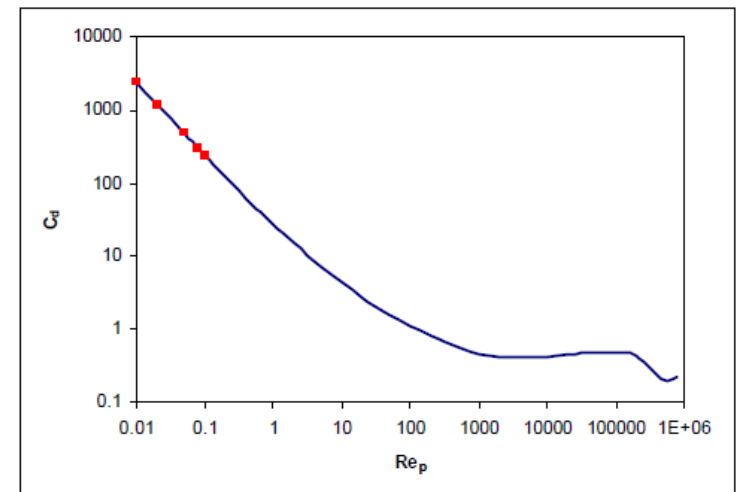
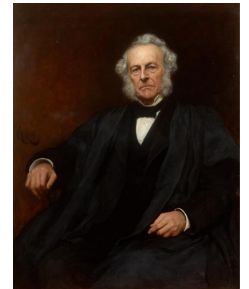
Para números de Reynolds bajos ( $Re_p < 2$ ,  $D_p < 50\mu m$ ), la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera cumple la ecuación de Stokes  $F_D = 3\pi\mu v_0 D_p$ , (resolución límite de la Ec. de Navier–Stokes), por lo que el coeficiente de arrastre predicho es:

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2} = \frac{(3\pi\mu v_0 D_p)}{\left(\frac{\rho v_0^2}{2}\right)\left(\frac{\pi D_p^2}{4}\right)} = \frac{24\mu}{\rho v_0 D_p} = \frac{24}{Re_p}$$

## Régimen de Stokes (RS)

Re	Cd	CdRe
0.01	2400	24
0.02	1200	24
0.05	484	24.2
0.08	304	24.32
0.1	244	24.4
0.2	123	24.6
0.5	51.4	25.7
0.8	33.3	26.64
1	27.2	27.2
2	15	30
5	7.12	35.6
10	4.35	43.5
20	2.74	54.8
50	1.56	78
100	1.1	110
200	0.808	161.6
500	0.568	284
1000	0.46	460
2000	0.42	840

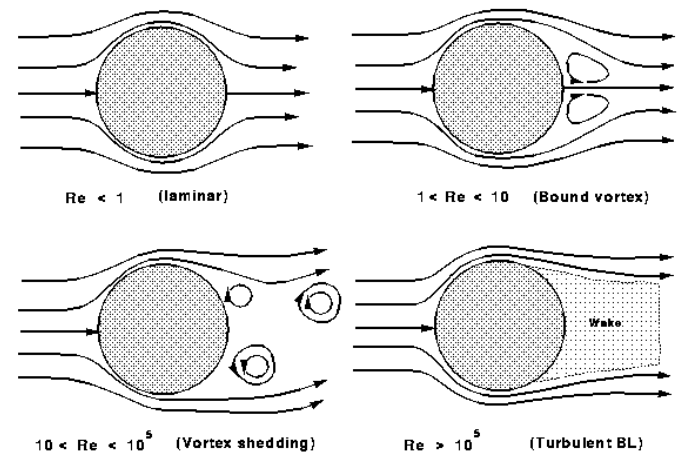
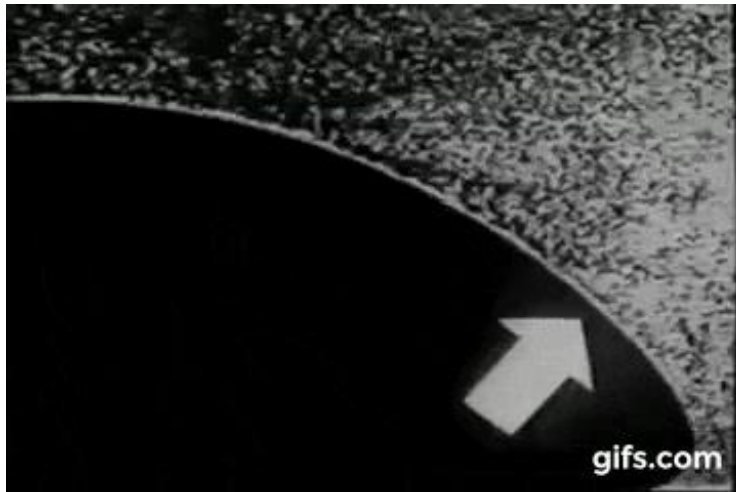
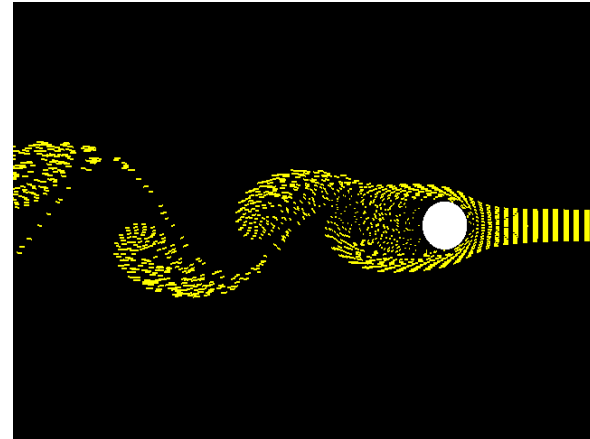
Cuando  $Re_p > 2$ , el patrón de flujo detrás de la esfera se vuelve diferente en comparación con la parte frontal de la misma y  $C_D Re_p > 24$ .



# Movimiento de partículas en un fluido Interacciones Fluido – Partícula $C_D = \phi(Re_p)$



Al incrementar  $Re_p$ , se desarrolla una zona de recirculación de flujo. La zona de recirculación o estela aumenta su tamaño en la medida que  $Re_p$  incrementa. La formación de grandes vórtices o remolinos disipan la energía y hacen que la presión sea mucho menor en la corriente de salida respecto a la de la entrada; la componente de la fuerza de presión se hace importante

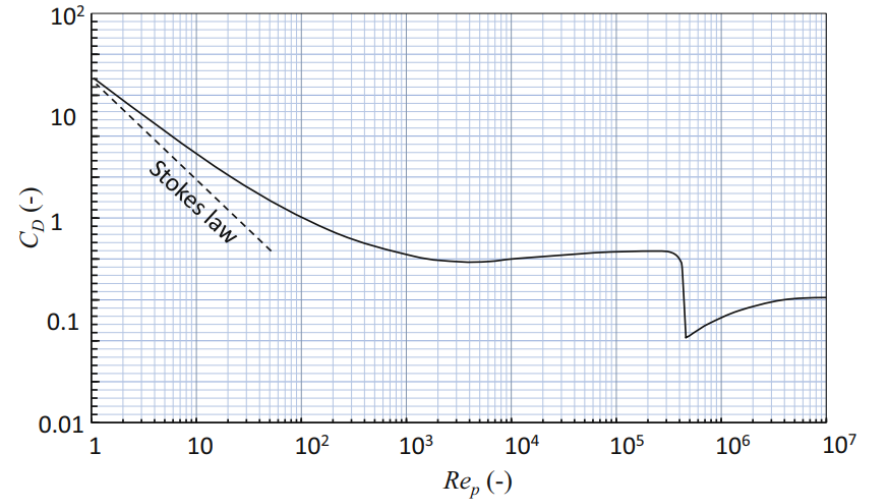


# Movimiento de partículas en un fluido Interacciones Fluido – Partícula $C_D = \phi(Re_p)$



Para  $Re_p \geq 500$ , la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera cumple la ecuación de Newton  $F_D = 0,055\pi D_p^2 v_0^2 \rho$ , por lo que el coeficiente de arrastre predicho es

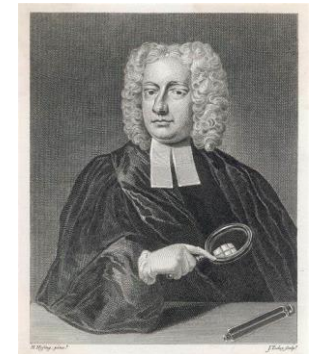
$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2} = \frac{(0,055\pi D_p^2 v_0^2 \rho)}{\left(\frac{\rho v_0^2}{2}\right)\left(\frac{\pi D_p^2}{4}\right)} = 0,44 = ctte$$



## Régimen de Newton (RN)



St Paul's cathedral



John Theophilus Desaguliers  
(1683 – 1744)



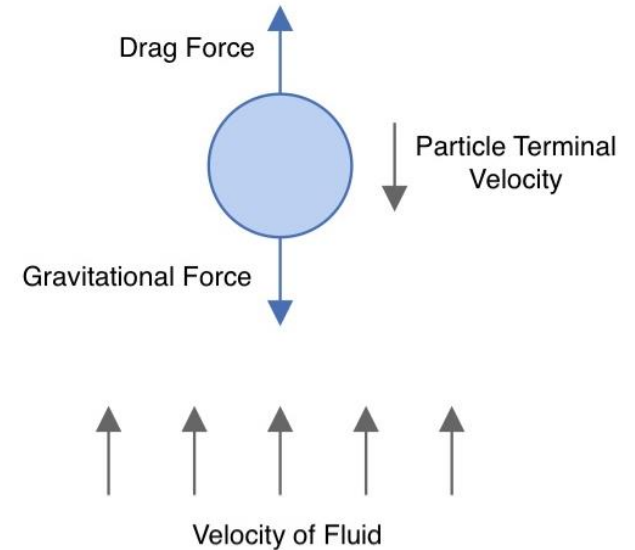
## Movimiento de partículas en un fluido balance de fuerzas

Una resultante de fuerzas externas actúa sobre la partícula.

Las fuerzas externas pueden provenir de la diferencia de densidad entre la partícula y el fluido, y de la acción de un campo gravitatorio, centrípeta, eléctrico o magnético. Sólo se considerará fuerzas gravitacionales, de diferencia de densidad y centrípetas.

Actúan tres fuerzas: 1) la fuerza externa, gravitacional o centrípeta  $F_E$ ; 2) la fuerza de flotación  $F_B$ , que es paralela a la fuerza externa, pero de sentido contrario; 3) la fuerza de arrastre  $F_D$  debido al movimiento relativo entre la partícula y el fluido. La fuerza de arrastre se opone al movimiento; actúa en la dirección del movimiento, pero en sentido contrario.

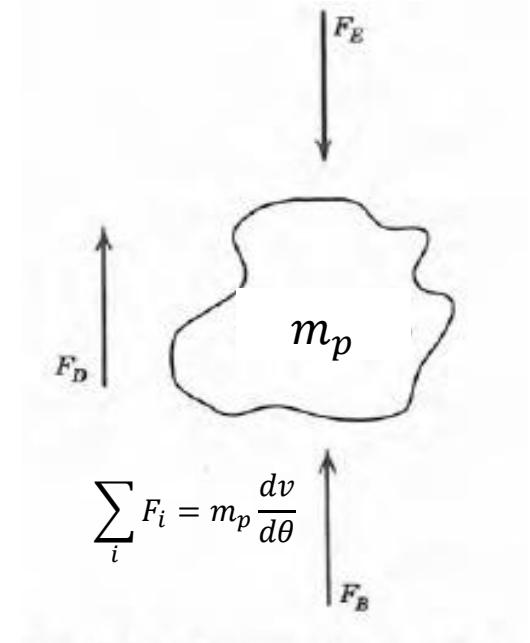
En el caso que la dirección del movimiento de la partícula con relación al fluido no sea paralela a la dirección de las fuerzas externas y de flotación, la fuerza de arrastre forma un ángulo con las otras dos. Esta situación se conoce como *movimiento bidimensional*.



## Movimiento de partículas en un fluido balance de fuerzas

$$\sum F = m_p a_p = m_p \frac{dv}{d\theta} \text{ Ecuación de Newton}$$

$$\left(\frac{m_p}{\rho_p}\right) = V_p \text{ y } \left(\frac{m_p}{\rho_p}\right) \rho \text{ es la masa de fluido desplazada por } V_p$$



$$F_E - F_D - F_B = m_p \frac{dv}{d\theta} \rightarrow m_p a_E - \underbrace{\frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2}}_{F_D} - \underbrace{\left(\frac{m_p}{\rho_p}\right) \rho a_E}_{F_B} = m_p \frac{dv}{d\theta} \rightarrow a_E - \frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2m_p} - \left(\frac{1}{\rho_p}\right) \rho a_E = \frac{dv}{d\theta}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = a_E - \frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2m_p} - \left(\frac{\rho}{\rho_p}\right) a_E \left\{ \begin{array}{l} a_E = g \rightarrow \frac{dv}{d\theta} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) g - \frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2m_p} \text{ campo gravitatorio} \\ a_E = r\omega^2 \rightarrow \frac{dv}{d\theta} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) r\omega^2 - \frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2m_p} \text{ campo centrípeto} \end{array} \right.$$

# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal

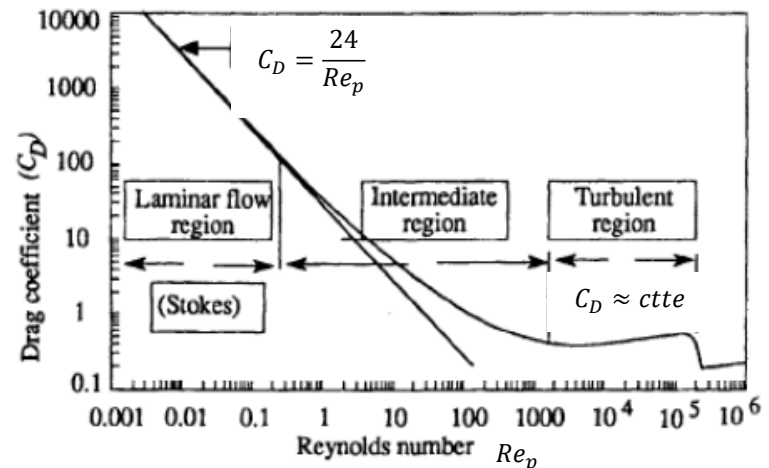
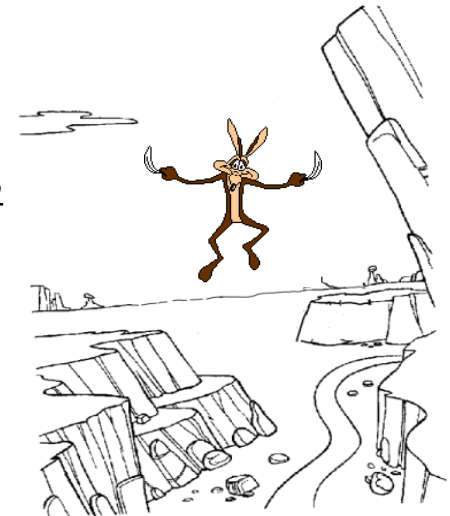
## velocidad terminal en un campo gravitatorio

Considerar una partícula cayendo en un campo gravitacional; otras partículas presentes no interfieren en su caída. En un arreglo de partículas por gravedad,  $g$  es constante;  $\frac{dv}{d\theta} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)g - \frac{C_D \rho v_{rel}^2 A_p}{2m_p}$  indica entonces que, conforme se incrementa la velocidad, la aceleración  $\frac{dv}{d\theta}$  tiende a cero; la partícula alcanza una velocidad constante. La velocidad relativa de la partícula será la velocidad terminal  $v_{rel} = v_t$  (esto es equivalente a  $F_E = F_D + F_B$  y  $\frac{dv}{d\theta} = 0$ ). Si la partícula es lo suficientemente pequeña, el tiempo y la distancia necesarios para llegar a aceleración nula es despreciable.

$$0 = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)g - \frac{C_D \rho v_t^2 A_p}{2m_p}$$



$$v_t = \sqrt{\frac{2m_p g (\rho_p - \rho)}{\rho \rho_p A_p C_D}}$$



# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal

velocidad terminal en un campo centrípeto

En el movimiento debido a una fuerza, la aceleración centrípeta  $a_{cent} = a_E = r\omega^2$  depende del radio y de la

velocidad angular;  $\frac{dv}{d\theta} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)r\omega^2 - \frac{C_D\rho v_t^2 A_p}{2m_p}$ .

En muchos casos prácticos, en los que se emplea campos centrífugos, se considera que  $\frac{dv}{d\theta} \rightarrow 0$ , por lo que puede establecerse para un radio  $r$  determinado, una velocidad terminal  $v_t$



$$0 = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right)r\omega^2 - \frac{C_D\rho v_t^2 A_p}{2m_p}$$



$$v_t = \omega \sqrt{\frac{2r(\rho_p - \rho)m_p}{A_p\rho_p C_D\rho}}$$

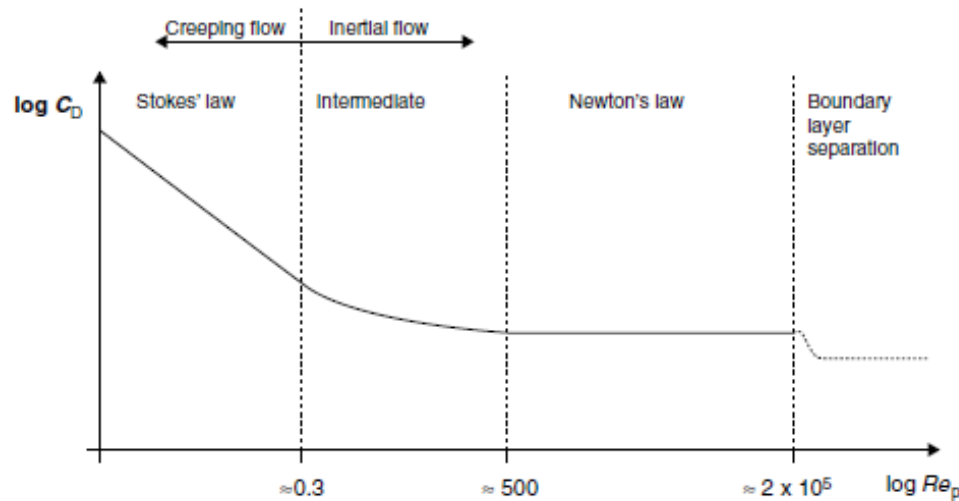
# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio $C_D = \phi(Re_p)$



Para partículas **esféricas**,  $A_p = \frac{\pi D_p^2}{4}$  y  $\left(\frac{m_p}{\rho_p}\right) = \frac{\pi D_p^3}{6}$ , la velocidad terminal es:  $v_t = \sqrt{\frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho C_D}}$ ;  $C_D = \phi\left(Re_p \left(= \frac{\rho v_t D_p}{\mu}\right)\right)$

Haider y Levenspiel (1989) establecieron (para partículas esféricas) que:  $C_D = \frac{24}{Re_p} + 3,3643(Re_p)^{-0,3471} + \frac{0,4607 Re_p}{Re_p + 2682,5}$

Se requiere un cálculo iterativo para  $v_t$  y  $C_D$



En Régimen de Stokes (flujo laminar  $Re_p \leq 2$ )  $\rightarrow C_D = \frac{24}{Re_p} \rightarrow v_t = \frac{(\rho_p - \rho)g D_p^2}{18\mu}$  ecuación de Stokes

En Régimen de Newton (flujo turbulento  $Re_p \geq 500$ )  $\rightarrow C_D = cte \rightarrow v_t = \left(\frac{3g(\rho_p - \rho)D_p}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  ecuación de Newton

$$v_t = \phi(D_p, \rho_p, \rho, \mu)$$

Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio  $C_D = \phi(Re_p, \psi)$

HL publican una correlación adecuada para **partículas no esféricas**, relacionando el  $C_D$  con  $Re_p$  y  $\psi$ .

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[ 1 + (8,171e^{-4,0655\psi})(Re_p)^{0,0964+0,5565\psi} \right] + \frac{73,69(e^{-5,0748\psi})Re_p}{Re_p + 5,378e^{6,2122\psi}}$$

$$Re_p = \frac{\rho v_t D_p}{\mu} \quad D_p \equiv D_V$$

$$v_t = \sqrt{\frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho C_D}}$$

*Powder Technology*, 58 (1989) 63 - 70

63

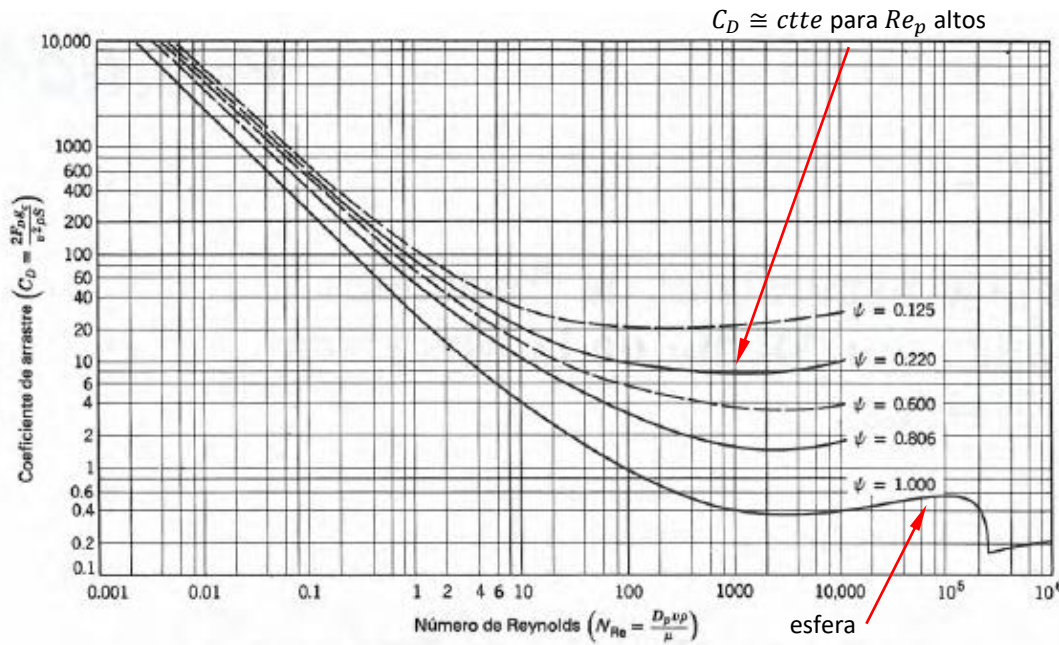
## Drag Coefficient and Terminal Velocity of Spherical and Nonspherical Particles

A. HAIDER and O. LEVENSPIEL



$$C_D = \frac{24}{Re} [1 + [8.1716 \exp(-4.0655 \phi)] \times Re^{(0.0964 + 0.5565 \phi)} + \frac{73.69 Re \exp(-5.0748 \phi)}{Re + 5.378 \exp(6.2122 \phi)}] \quad (12)$$

# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio $C_D = \phi(Re_p, \psi)$



Las gráficas y correlaciones son aplicables en condiciones restringidas: La partícula ha de ser sólida, estar lejos de otras partículas y de las paredes del recipiente, de forma que no se distorsione el patrón de flujo alrededor de la partícula; además la partícula ha de moverse a su velocidad terminal con respecto al fluido.

Si se conoce el factor de esfericidad de la partícula, la correlación de  $HL$  se puede combinar con  $v_t = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D_p g (\rho_p - \rho)}{\rho C_D}}$  (aunque esta ecuación es para esferas) para obtener la velocidad terminal. La corrección de la “no esfericidad” está contenida en la correlación  $HL$ . Se requiere calculo iterativo.

# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio $C_D = \phi(Re_p, \psi)$

Forma explícita propuesta por Haider y Levenspiel (1989)

Para partículas esféricas :  $v_t = \sqrt{\frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho C_D}} \rightarrow C_D = \frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho v_t^2}$  y  $Re_p = \frac{\rho v_t D_p}{\mu}$

## TERMINAL VELOCITY OF FALLING SOLIDS

To find the terminal velocity  $u_t$  of particles from any of the proposed  $C_D$  vs.  $Re$  expressions requires a tedious trial and error procedure since  $u_t$  is present in both variables. Thus, it would be useful to have an expression which explicitly gives  $u_t$  in terms of the system variables.

El número de Arquímedes adimensional:  $C_D Re_p^2 = \frac{4 D_p^3 \rho g (\rho_p - \rho)}{3 \mu^2} \rightarrow \frac{3}{4} C_D Re_p^2 = \frac{\rho g (\rho_p - \rho)}{\mu^2} D_p^3 = Ar$

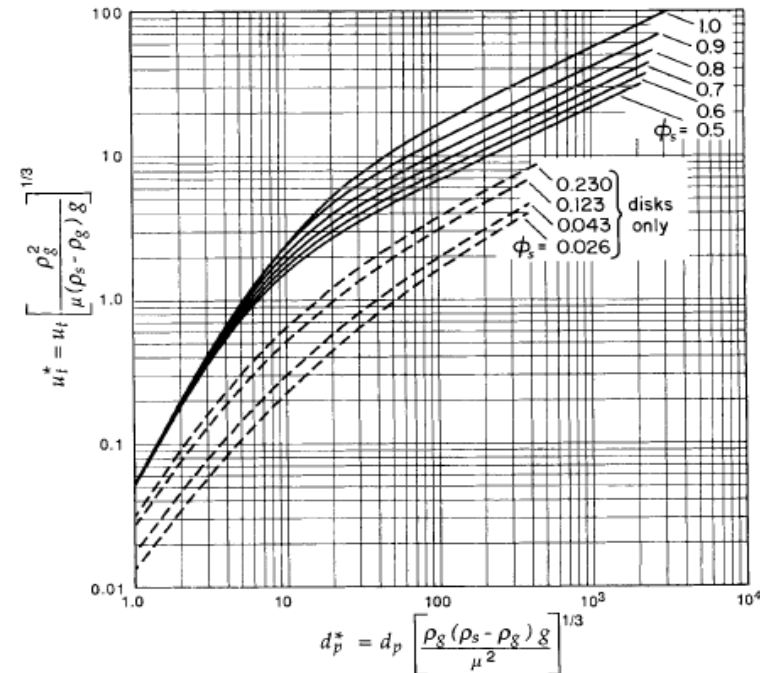
permite definir un  $D_p^* = \left(\frac{3}{4} C_D Re_p^2\right)^{\frac{1}{3}} = D_p \left(\frac{\rho g (\rho_p - \rho)}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{3}} = Ar^{\frac{1}{3}}$

El número :  $\frac{Re_p}{C_D} = \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{\mu g (\rho_p - \rho)} v_t^3 \rightarrow \frac{4 Re_p}{3 C_D} = \frac{\rho^2}{\mu g (\rho_p - \rho)} v_t^3$

permite definir un  $v_t^* = \left(\frac{4 Re_p}{3 C_D}\right)^{\frac{1}{3}} = v_t \left(\frac{\rho^2}{\mu g (\rho_p - \rho)}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{Re_p}{Ar^{\frac{1}{3}}}$

Utilizando datos experimentales, los autores establecieron la siguiente relación explícita (aproximada) para determinar  $v_t$

$v_t^* = \left[ \frac{18}{D_p^{*2}} + \frac{2,335 - 1,744\psi}{D_p^{*0,5}} \right]^{-1}$   $0,5 < \psi \leq 1$  la ecuación no es válida para discos





# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio $C_D = \phi(Re_p, \psi)$

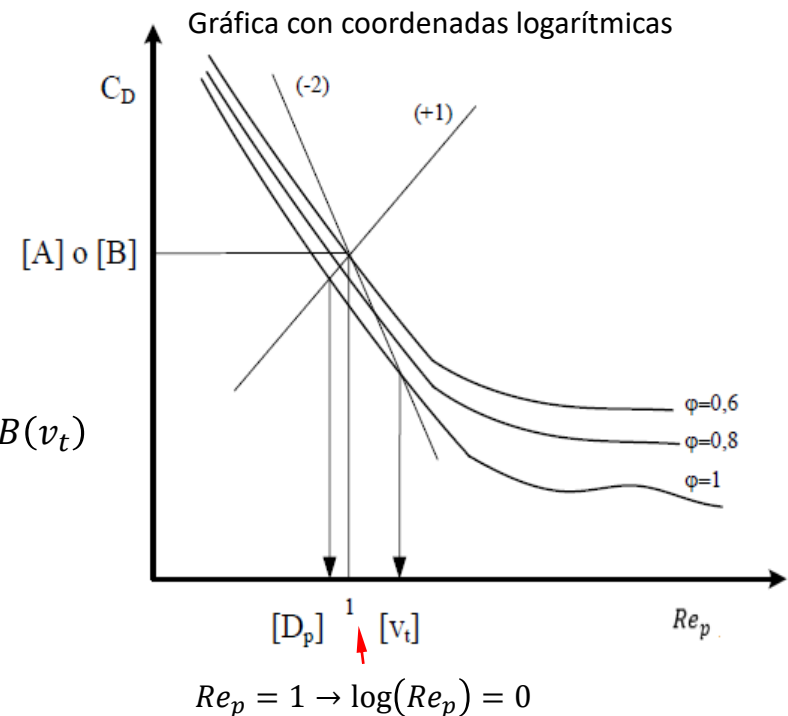
una combinación de la ecuación  $v_t = \sqrt{\frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho C_D}}$  con una gráfica de comportamiento  $C_D = \phi(Re_p, \psi)$

$$C_D = \frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho v_t^2} \rightarrow \log C_D = \log \left[ \frac{4 D_p g (\rho_p - \rho)}{3 \rho} \right] - 2 \log v_t \quad \log Re_p = \log \left[ \frac{\rho D_p}{\mu} \right] + \log v_t$$

$$\log C_D = \log \underbrace{\left[ \frac{4 D_p^3 g \rho (\rho_p - \rho)}{3 \mu^2} \right]}_A - 2 \log Re_p$$

$$\text{Analogamente } \log C_D = \log \underbrace{\left[ \frac{4 g \mu (\rho_p - \rho)}{3 \rho^2 v_t^3} \right]}_B + \log Re_p$$

$$Re_p = 1 \rightarrow \log(Re_p) = 0 \text{ y } \log C_D = \log A(D_p) \text{ o } \log C_D = \log B(v_t)$$

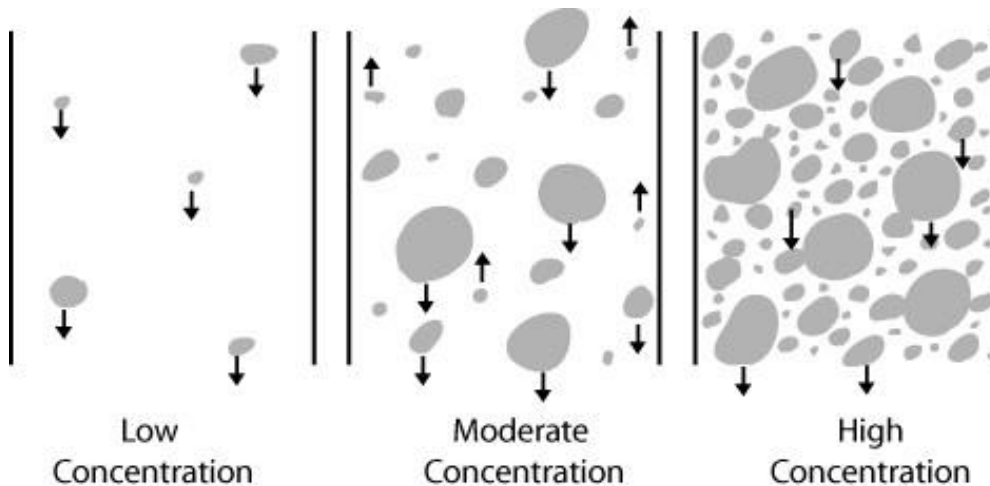


# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio

## Decantación Libre (Free Settling) y Decantación impedida (Hindered Settling)

Free Settling: Cuando la partícula se encuentra a suficiente distancia de los límites del contenedor o de otras partículas para que su caída no se vea afectada por ellas. Se presenta en suspensiones de baja concentración de sólidos.

Hindered Settling: Cuando el movimiento de las partículas se ve impedido por otras partículas: sucederá cuando las partículas estén cerca unas de otras, aunque es posible que no estén colisionando. Se presenta en suspensiones de alta concentración de sólidos.



Puede ocurrir que partículas de diferente  $D_p$  presenten similar  $v_t$ , por los arrastres e interacción mutua. Todas las partículas de mueven a velocidad constante

La zona inferior del sistema presenta concentración variable. En la parte inferior de la columna de suspensión se encuentra el sedimento recogido, que contiene las partículas más grandes de la suspensión. La definición de estas zonas estará influenciada por el tamaño de las partículas involucradas y el rango de estos tamaños.

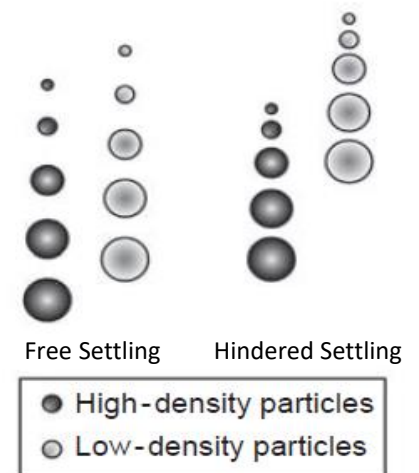
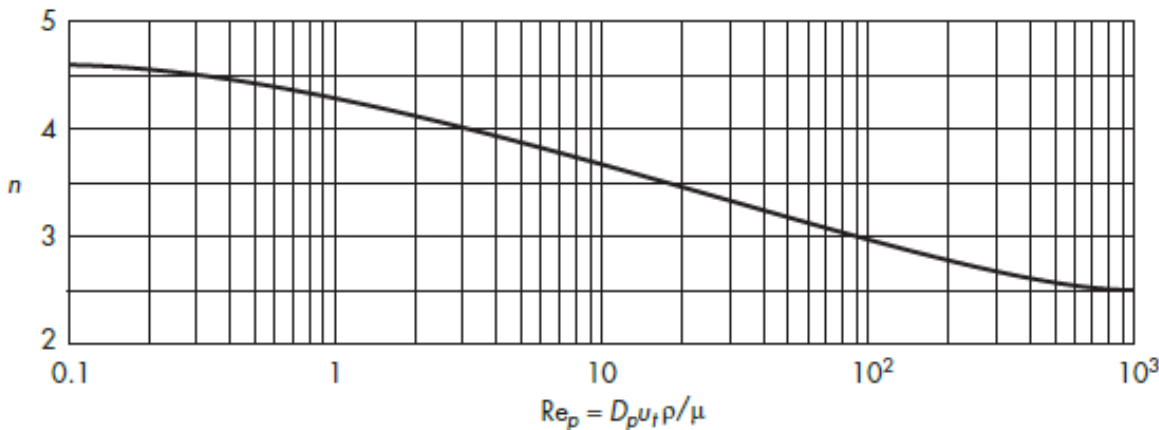
# Movimiento de partículas en un fluido velocidad terminal en un campo gravitatorio

## Decantación Libre (Free Settling) y Decantación impedida (Hindered Settling)

En la decantación impedida, los gradientes de velocidad alrededor de cada partícula están afectados por la presencia de las partículas más próximas; no son aplicables las correlaciones del arrastre normal.

Las partículas al asentarse desplazan líquido que fluye hacia arriba y da lugar a que la velocidad de la partícula con relación al fluido sea menor que la velocidad absoluta de decantación.

Para una suspensión uniforme, la velocidad de decantación  $v_s$  se estima a partir de la velocidad terminal para una partícula aislada  $v_t$  utilizando la ecuación empírica de Maude y Whitmore:  $v_s = v_t(\varepsilon)^n = v_t(1 - C_v)^n$  donde  $\varepsilon$  representa la porosidad (volumen ocupado por el fluido dividido el volumen total) y  $C_v$  la concentración volumétrica de sólidos. La ecuación debe utilizarse con precaución, (depende de la forma de la partícula y de la distribución de tamaño). Para el diseño riguroso es preciso disponer de datos experimentales.



**A generalized theory of sedimentation**  
By A. D. MAUDE, B.Sc., Ph.D., A.Inst.P.\* and R. L. WHITMORE, B.Sc., Ph.D., A.Inst.P., Department of Mining and Fuels, University of Nottingham

[Paper first received 3 January, and in final form 25 June, 1958]

A theoretical relationship between the concentration and the sedimentation velocity of non-flocculated suspensions of particles is derived. It is shown that the settling velocity relative to that of a single particle in the suspension is  $(1 - \beta)^n$  where  $\beta$  is a function of particle shape, size distribution and Reynolds number and  $c$  is the volume of solid per unit volume of suspension. The expression is shown to satisfy the experimental results of other workers. An empirical relationship between  $\beta$  and the Reynolds number is suggested.