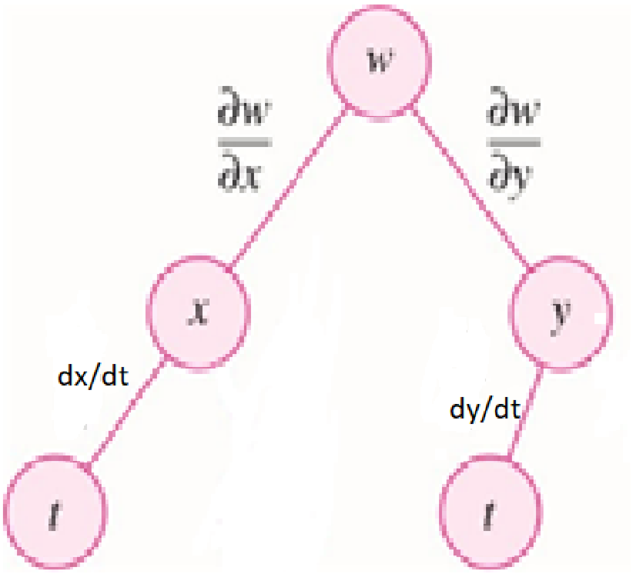
# Tema 5: Cálculo en campos escalares

## *Experimentación Activa*

## REGLA DE LA CADENA

Sean: w(x,y), x(t), y(t) funciones continuas y diferenciables.
La función compuesta w(x(t), y(t)) = W(t) se puede derivar aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



. Hallar $dw/dt$ aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas y verificar el resultado por sustitución y derivación, siendo:

a) $w(x,y) = y^2\,\sqrt{x+1}$ con $x(t) = t^3 - t\,,\; y(t) = t^2 - 2t + 4$

Aplicamos regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$w = y^2\sqrt{x+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = w_x = \frac{y^2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = w_y = 2y\sqrt{x+1}$$

$$x = t^3 - t \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = x' = 3t^2 - 1$$

$$y = t^2 - 2t + 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = y' = 2t - 2$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{y^2}{2\sqrt{x+1}}(3t^2 - 1) + 2y\sqrt{x+1}(2t - 2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(t^2 - 2t + 4)^2}{2\sqrt{(t^3 - t\,) + 1}}(3t^2 - 1) + 2(t^2 - 2t + 4)\sqrt{(t^3 - t\,) + 1}(2t - 2)$$

Ahora para verificar el resultado: por sustitución y recién vamos a derivar:

$w = y^2\sqrt{x+1}$ reemplazamos x e y:

$W(t) = (t^2 - 2t + 4)^2\sqrt{t^3 - t + 1}$

$$\frac{dw}{dt} = 2(t^2 - 2t + 4)(2t - 2)\sqrt{t^3 - t + 1} + (t^2 - 2t + 4)^2 \frac{(3t^2 - 1)}{2\sqrt{t^3 - t + 1}}$$

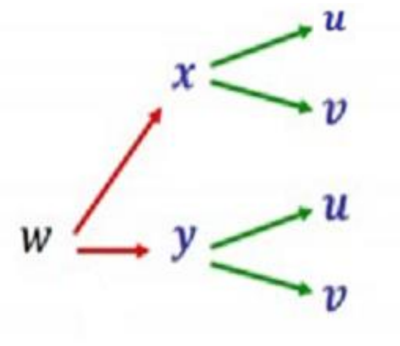
**.** Utilizando la regla de la cadena, calcular $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$, siendo:

a) $w(x,y) = e^{x-3y}$ con $x(u,v) = vu^3 - v$ , $y(u,v) = u - 4v$

Entonces la función w(x,y) con x(u,v) y(u,v) nos queda

w(x(u,v), y(u,v)) = w(u,v)

Aplicamos regla de la cadena para la derivación de una función compuesta:




$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = e^{x-3y}(3vu^2\ ) + (-3)e^{x-3y}\ .1$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = e^{(vu^3 - v) - 3(u-4v)}(3vu^2\ ) - 3e^{(vu^3 - v) - 3(u-4v)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 3vu^2 e^{vu^3 + 11v - 3u} - 3e^{vu^3 + 11v - 3u}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial u} = 3(vu^2 - 1)e^{vu^3 + 11v - 3u}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = e^{x-3y}(u^3 - 1) + (-3)e^{x-3y}\,.(-4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = e^{(vu^3 - v) - 3(u-4v)}(u^3 - 1\ ) + 12e^{(vu^3 - v) - 3(u-4v)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = (u^3 - 1 + 12)e^{vu^3 + 11v - 3u}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial v} = (u^3 + 11)e^{vu^3 + 11v - 3u}}$$