Integración Numérica

Cuadraturas de Gauss-Lagendre

Ingeniería en Informática – Ingeniería en Minas – Licenciatura en Sistemas
Mg Ing Ariel Alejandro Vega

1

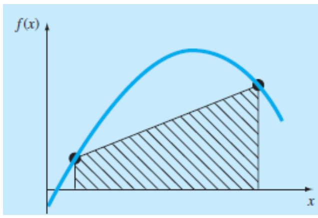
Motivación

- Los métodos de Newton – Cotes se aplican usando valores igualmente espaciados, previamente predeterminados o fijos.
- Esta situación afecta en la precisión del método aplicado.
- Los métodos de Gauss-Lagrende pretenden definir valores óptimos para aproximar la integral de la manera más precisa.
- Estos puntos de Lagendre constituyen las raíces del polinomio usado para interpolar la función a integrar.

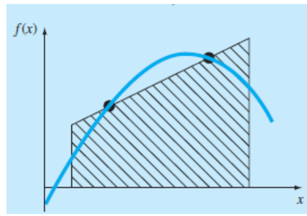
2

La idea

- Suponga la regla del Trapecio



- La integración con puntos de Lagendre



Los puntos de Lagendre no estarán equidistanciados
No se podrán usar en los métodos de Newton-Cotes
El objetivo es minimizar el error

3

La idea

- La regla del Trapecio está dada por

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

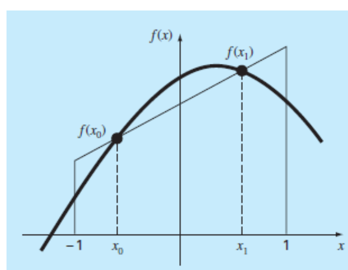
Con $h = (b-a)$

- La expresaremos como

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(a) + w_2 f(b)$$

Con $w_1 = w_2 = \frac{h}{2}$

- Suponga que se desea integrar en el intervalo [-1,1] entonces tendremos



- Donde w_1, w_2, x_0, x_1 son desconocidos, pero si se eligen adecuadamente la integral será EXACTA.

4

Método de coeficientes indeterminados

- Las condiciones w_1 y w_2 se obtienen al suponer que la función se ajusta con exactitud a la integral de una constante y de una función lineal.
- Las condiciones x_0 y x_1 se obtienen suponiendo se ajustan a la integral de una parábola y de una función cúbica.
- Entonces estas son las 4 ecuaciones que permiten obtener las condiciones.

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

5

Método de coeficientes indeterminados

- La resolución de estas ecuaciones determinan que:

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773503\ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503\ldots$$

- Que reemplazados en la formula de la regla del trapecio modificada se obtiene:

$$I \cong w_1 f(x_0) + w_2 f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Observe que esta suma de funciones tiene una exactitud de tercer grado.

¿Y si el intervalo es diferente?

Se plantea un cambio de variable. Se puede verificar que

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$$

Donde x_d está relacionada de manera lineal con x

6

Método de coeficientes indeterminados

- La fórma del algoritmo general del método para cualquier intervalo será:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i f(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b-a}{2})$$

- Donde:

a= Límite inferior

b= Límite superior

n= Número de puntos a emplear

ω_i= Factores de ponderación

x_i= Los valores de abscisas de la cuadratura de Gauss

7

Ejemplo

- Calcule mediante Gauss-Lagrende de 2 puntos la integral de

$$\int_{0,2}^{1,2} e^{x^2} dx$$

- Reemplazando en la fórmula general

$$\int_{0,2}^{1,2} e^{x^2} dx \approx \frac{b-a}{2}(\omega_0 f\left(\frac{b-a}{2}x_0 + \frac{b-a}{2}\right) + \omega_1 f(\frac{b-a}{2}x_1 + \frac{b-a}{2}))$$

$$I \approx \frac{1.2-0.2}{2}\left(1 \cdot f\left(\frac{1.2-0.2}{2}(-0.5773502692) + \frac{0.2+1.2}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1.2-0.2}{2}(0.5773502692) + \frac{0.2+1.2}{2}\right)\right)$$

$$I \approx 0.5\big(1 \cdot f(0.41132) + 1 \cdot f(0.98868)\big)$$

8

Ejemplo

Se evalúa la función

$f(x) = e^{x^2}$ $\quad f(x = 0.41132) = 1.18434$ $\quad f(x = 0.98868) = 2.65777$

Sustituimos los valores obtenidos

$$I \approx 0.5(1 \cdot 1.18434 + 1 \cdot 2.65777)$$

$$I \approx 1.92106$$

$$\int_{0.2}^{1.2} e^{x^2} dx \approx 1.92106$$

Generalización del método

- Si desea utilizar más de dos puntos de Lagendre, es posible utilizar una tabla empírica de factores de ponderación y valores xi

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función
2	$c_0 = 1.0000000$ $c_1 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$
3	$c_0 = 0.5555556$ $c_1 = 0.8888889$ $c_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = 0.774596669$
4	$c_0 = 0.3478548$ $c_1 = 0.6521452$ $c_2 = 0.6521452$ $c_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$
5	$c_0 = 0.2369269$ $c_1 = 0.4786287$ $c_2 = 0.5688889$ $c_3 = 0.4786287$ $c_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$
6	$c_0 = 0.1713245$ $c_1 = 0.3607616$ $c_2 = 0.4679139$ $c_3 = 0.4679139$ $c_4 = 0.3607616$ $c_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$