# VARIABLE ALEATORIA

# Variable aleatoria

Frecuentemente interesa conocer más que el resultado de un experimento aleatorio, una función de dicho resultado.

Una variable aleatoria es una función con valores numéricos y definida sobre un espacio muestral

**Ejemplo**: Si lanzamos al aire tres monedas, podemos definir la función como *X*:

*X*: número de caras que resultan del experimento.

Sobre un mismo experimento podemos observar diferentes cosas y por lo tanto definir diferentes variables aleatorias.

# Variable aleatoria

Sea S un espacio muestral asociado a un experimento E. Una variable aleatoria es una función X que asigna a cada punto del espacio muestral un valor real.

$$X : S \to \Re$$

La variable aleatoria puede ser discreta o continua.

Cuando los valores que toma una variable aleatoria son finitos o infinitos numerables se dice que es **discreta.**

# Ejemplos variable aleatoria discreta

| Experimento | Variable aleatoria | Valores posibles V.A |
|---|---|---|
| Llamar a cinco clientes | Cantidad de clientes | 0, 1,2,3,4,5 |
| Inspeccionar un embarque de 40 chips | Cantidad de chips defectuosos | 0,1,2,….,40 |
| Lanzar una moneda tres veces | Numero de caras | |

**Ejemplo**: Considerando el experimento aleatorio de tirar una moneda equilibrada dos veces, y registrar la secuencia de resultados. Entonces el espacio muestral es:

$$S = \{(c, c);\ (c, s);\ (s, c);\ (s, s)\}$$

Definimos la VA

X='Cantidad de caras observadas en los dos tiros'. Entonces resulta:

X(c,c) = 2;

X(c,s) = X(s,c) = 1;

X(s,s) = 0:

Ejemplo: Consideremos el experimento E: “Tirar una moneda hasta que salga cara y contar los tiros necesarios hasta que esto ocurra”.
La VA que queda entonces definida es X='Cantidad de tiros necesarios”.
Tenemos:

$$S = \{(c); (s, c); (s, s, c); (s, s, s, c)\}$$

X(c) = 1;
X(s,c) = 2;
X(s,s,c) = 3
etc

## Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria (VA) se dice discreta cuando su recorrido es finito o infinito numerable.

## Rango o Recorrido

Se denomina rango o recorrido de una VA X, y se denota con $R_X$ al conjunto de todos los posibles valores para la imagen de la función X.

Para los ejemplos anteriores cuales son los rangos de las variables?

$$R_X = \{0,1,2\}$$

$$R_X = \{1,2,3, \dots\} = \mathbb{N}$$

# Función de Probabilidad Puntual

Función de probabilidad Puntual asociada a la VA discreta X a la función:

$$p_X : R_X \longrightarrow [0;\ 1]$$

tal que:

$$p_X(x) \geq 0.$$

$$\sum_{x \in R_X} p_X(x) = 1$$

Donde

$p_X(x_i\ ) = P(X = x_i) = P(\{s \in S: X(s) = x_i\})$

Asigna a cada punto del recorrido de la VA X denotado con $R_X$ la probabilidad que acumulan todos los puntos muestrales que toman ese

valor como imagen. Es positiva y la suma de todos sus valores coincide con la probabilidad del espacio muestral (1).

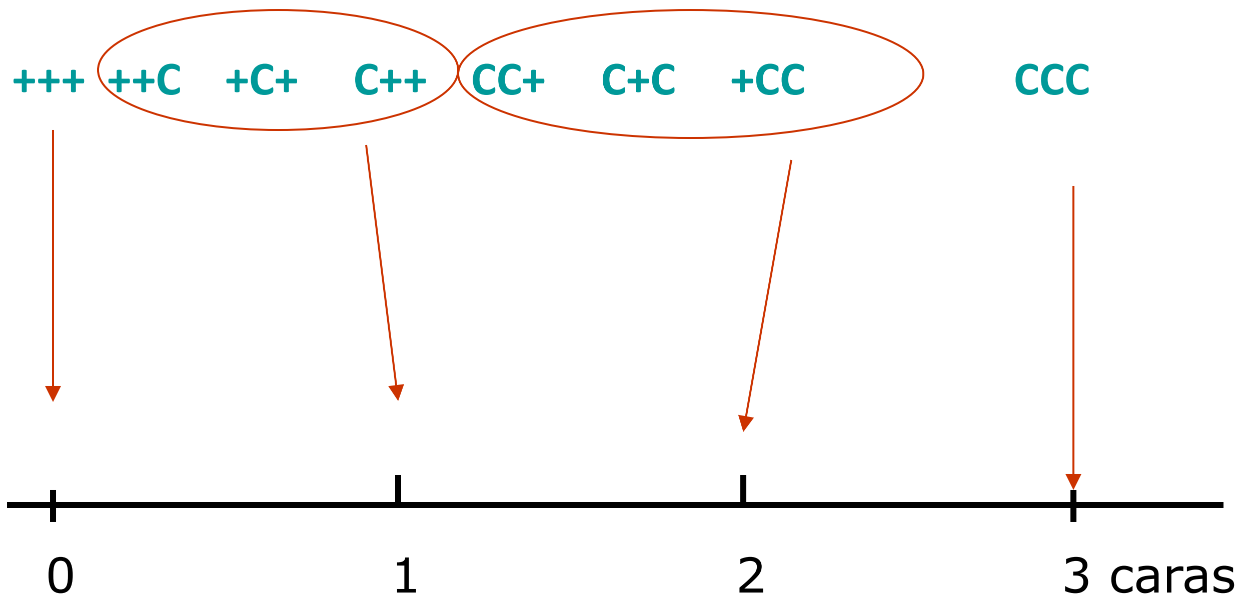
## **Ejemplo de variable aleatoria discreta:**
## Experimento: se lanza una moneda tres veces

X: “número de caras obtenidas en los tres lanzamientos

Elementos del espacio muestral

Ley de correspondencia X

Nº reales




Podemos construir una tabla de frecuencias para el recorrido de X

REC X ={0, 1, 2, 3}

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| f | 1 | 3 | 3 | 1 |

Como todos los puntos muestrales son igualmente posibles (moneda perfecta), se puede determinar una distribución de probabilidades para los valores posibles de la VA

Se define una función que hace corresponder a los valores posibles x de la variable aleatoria X un número que determina la probabilidad que tiene la variable aleatoria X de asumir un valor particular x de su recorrido.

Simbólicamente indicamos los valores que toma esta función de probabilidades en la formas

$$P(X=x) \quad \text{o} \quad P(\{s/X(s) = x\})$$

Que indican la probabilidad de que algún punto muestral **s** tome el valor **x** de **X**

Para nuestro ejemplo, obtenemos los siguientes valores de la función de probabilidad:

$P(X = 0) = P(\{s/X(s) = 0\} = P((+++)) = 1/8$

$P(X = 1) = P(\{s/X(s) = 1\} = 3/8$

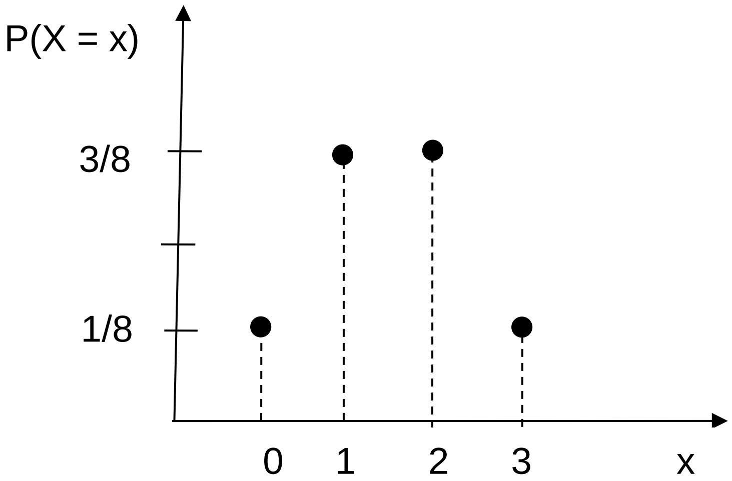
$P(X = 2) = 3/8$

$P(X = 3) = 1/8$

que resumimos en la siguiente tabla

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Representemos gráficamente esta distribución, mediante un gráfico a bastones




$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 0 \; y \; 3 \\ \frac{3}{8} & x = 1 \; y \; 2 \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

El conjunto de pares ordenados $(x, p_x(x))$ es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X o una función de masa de la VA X o función de probabilidad de X, si para cualquier x se verifica:

(1) $P_X(x) \geq 0$ (2) $\Sigma \, p_x(x) = 1$ (3) $P_x(x) = P(X=x)$

Función de probabilidad como aquella que surge al asignar probabilidades a cada uno de los valores de una variable aleatoria

# Función de Distribución Acumulada (FDA)

La función de distribución acumulada (FDA) o función de distribución de una variable aleatoria X es una función definida para todo número real como sigue:

- $$\mathbf{F(x) = P(X \leq} x\mathbf{)}$$

- Es una función definida sobre la recta real.

- El valor de F para cualquier x debe ser un número tal que $0 \leq F(x) \leq 1$ pues F es la probabilidad del suceso $(X \leq x)$.

O sea que la función de distribución acumulada nos da en cada valor x, la probabilidad de que el valor observado sea a lo sumo x.

## Propiedades de FDA

- La FDA es monótona no decreciente:

Si $x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \quad y \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$:

- La FDA es siempre continua por la derecha

- La FDA puede no ser continua y presentar un número finito de discontinuidades finitas o salto, diremos que F es continua en x si

$$F(x^-)=F(x^+)= F(x)$$

- Cuando X es discreta y $xi \in R_X \rightarrow p_X\,(xi\,) = F\,(xi\,) - F\,(xi^-\,)$ (cada salto es una probabilidad puntual).

Es decir cuando X es discreta F es una función escalera con saltos en los puntos del $R_X$ .

- Cuando X es discreta, $p_X(x_i) = F(x_i) - F({x_i}^-)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$

## Determinación de probabilidades a partir de la FDA

Si se conoce la FDA de una variable aleatoria X, entonces se puede determinar la probabilidad de que X esté en cualquier intervalo real, teniendo en cuenta las siguientes reglas.

1. $P(X>x) = 1- F(x)$ para cualquier valor de x
2. $x_1 < x_2 \rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad \forall\, x_1, x_2$
3. $P(X<x) = F(x^-)$ para cualquier valor de x.
4. $P(X =x) = F(x^+) - F(x^-)$ para cualquier valor de x.

# FDA para una variable aleatoria discreta

Si $p_x$ es la función de masa para los valores de la VA X se define FDA X a la siguiente función F:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_x(t)$$

**Ejemplo**: Si lanzamos al aire tres monedas, podemos definir la función como X:

X: número de caras que resultan del experimento.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

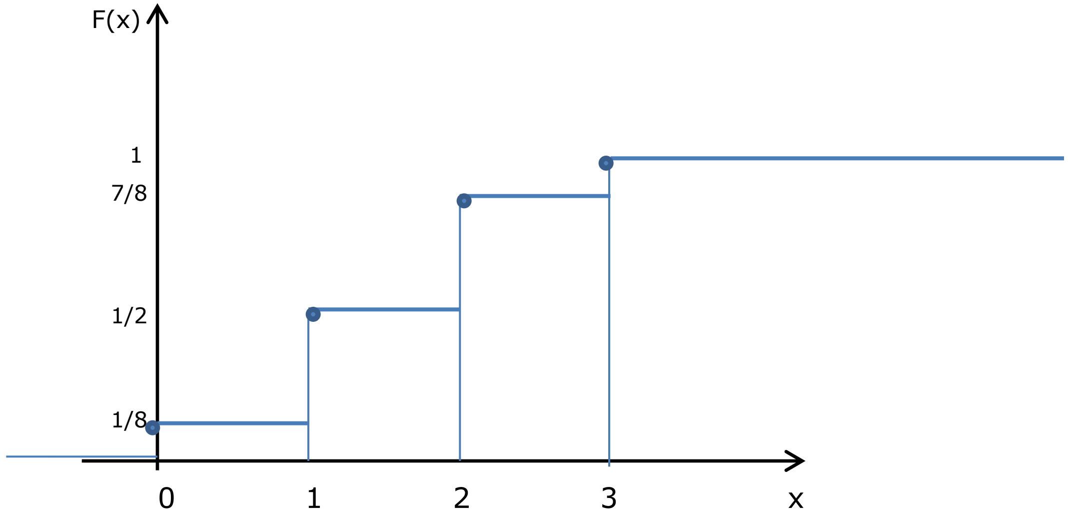
# La función F resulta:

$$F(0) = P(X = 0) = \sum_{t \leq 0} p_x(t) = p_x(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{t \leq 1} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{t \leq 2} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{t \leq 3} p_x(t) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) + p_x(3) = 1$$




$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x < 0 \\ \dfrac{1}{8} \ \ si\ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} \ \ si\ 1 \le x < 2 \\ \dfrac{7}{8} \ \ si\ 2 \le x < 3 \\ 1 \ \ si\ x \ge 3 \end{cases}$$

Ejemplo:

Considere una universidad que tiene 15000 estudiantes y sea la variable

X="Cantidad de cursos en los cuales esta inscripto un estudiante seleccionado al azar para este cuatrimestre".
Se sabe que la variable X tiene la siguiente función de distribución:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | 0.02 | 0.03 | 0.13 | 0.25 | 0.39 | 0.18 |
| Cant. Alumnos | 300 | 450 | 1950 | 3750 | 5850 | 2700 |

¿Cuál es el número promedio de cursos en los que se inscribe un estudiante?

$$Prom(X) = \frac{1 * 300 + 2 * 450 + 3 * 1950 + 4 * 3750 + 5 * 5850 + 6 * 2700}{15000} =$$

$$= 1 * p_X(1) + 2 * p_X(2) + 3 * p_X(3) + 4 * p_X(4) + 5 * p_X(5) + 6 * p_X(6) = 4{,}5$$

# Esperanza matemática, valor esperado o media de una VA X- Varianza de una VA X

## Variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $p_x$ y ReC X = $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; **la esperanza matemática** de X es:

$$\mu_x = E(X) = \sum_i x_i p_x(x_i)$$

Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $p_x$ y esperanza matemática $\mu_x$; **la varianza de X**, se define como el promedio ponderado de las discrepancias elevadao al cuadrado entre cada resultado posible y el valor esperado, donde la ponderación está dada por la probabilidad de cada uno de los resultados respectivos:

$$\sigma_x^2 = VAR(X) = E(X - \mu_x)^2 = \sum_i (X - \mu_x)^2 p_x(x_i)$$

La esperanza es el valor promedio al cual tiende una variable luego de infinitas realizaciones de la misma.

Observacion: Si los valores estan concentrados alrededor de la media entonces la varianza será relativamente pequeña. Sin embargo una proporción importante de las probabilidades x estan alejados de  en ese caso el valor de la VAR(X) sera grande.

Ejemplo: en el lanzamiento de un dado, X es el número de puntos que arroja el dado y la distribución de X resulta:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_x(x_i)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{6} x_i p_x(x_i) = 1.\left(\frac{1}{6}\right) + 2.\left(\frac{1}{6}\right) + 3.\left(\frac{1}{6}\right) + 4.\left(\frac{1}{6}\right) + 5.\left(\frac{1}{6}\right) + 6.\left(\frac{1}{6}\right) = 21/6$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x_i - 3.5)^2 p_x(x_i) = (1-3.5)^2(1/6) + (2-3.5)^2(1/6) + \cdots + (6-3.5)^2(1/6)$$

$$\sigma_x^2 = 2.9166 \ , \sigma = \sqrt{VAR(X)} = 1.71$$

## Juegos

A un juego de azar podemos asignarle una **variable aleatoria *X***, cuyos valores son **las ganancias correspondientes a los posibles resultados**. La esperanza matemática de la variable aleatoria $X$ representa el **beneficio medio o ganancia media** que se obtiene en cada jugada cuando se juega un número elevado de veces.

Si la esperanza matemática es 0 se dice que el **juego** es **justo.**
Si es mayor que 0 se dice que el **juego** es **favorable** al jugador.
Si es menor que 0 se dice que perjudica al jugador y **no** es **favorable**.

Sea el juego que consiste en sacar una bola de una urna que contiene 7 bolas rojas y 3 bolas negras. Ganamos $50 si la bola extraída es roja y pagamos $150 en el caso de que sea negra. ¿Qué podemos esperar si jugamos muchas veces?

Espacio muestral S = *{R, N}*. Consideramos las ganancias como positivas y las pérdidas negativas:

| | Variable aleatoria *X* | Función de probabilidad |
|---|---|---|
| *R* | *50* | *0,70* |
| *N* | *150* | *0,30* |

$$\mu = 50 \cdot 0{,}7 + (-150) \cdot 0{,}3 = -10$$

Una ruleta tiene los números del 0 al 36. Se apuesta \$1 a que sale un número par. Sea X la variable que indica la ganancia en cada tiro. ¿Cuál es la ganancia esperada? (El cero no se considera par).

| $x$ | 1 | -1 |
|---|---|---|
| $p_X(x)$ | $\frac{18}{37}$ | $\frac{19}{37}$ |

Entonces

$$E(X) = 1 * \frac{18}{37} + (-1) * \frac{19}{37} = -0{,}027$$

En este caso la esperanza es negativa lo que indica que si jugamos muchas veces por cada peso apostado esperamos perder 3 centavos.