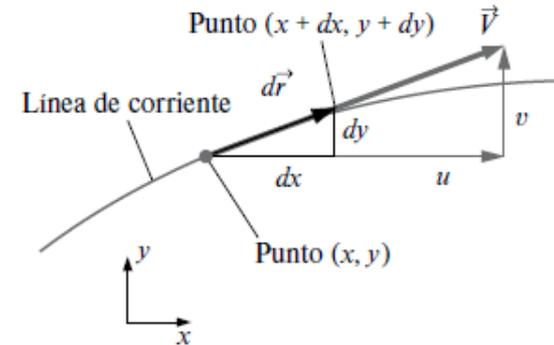


Operaciones Unitarias 1

Elementos de la mecánica de fluidos

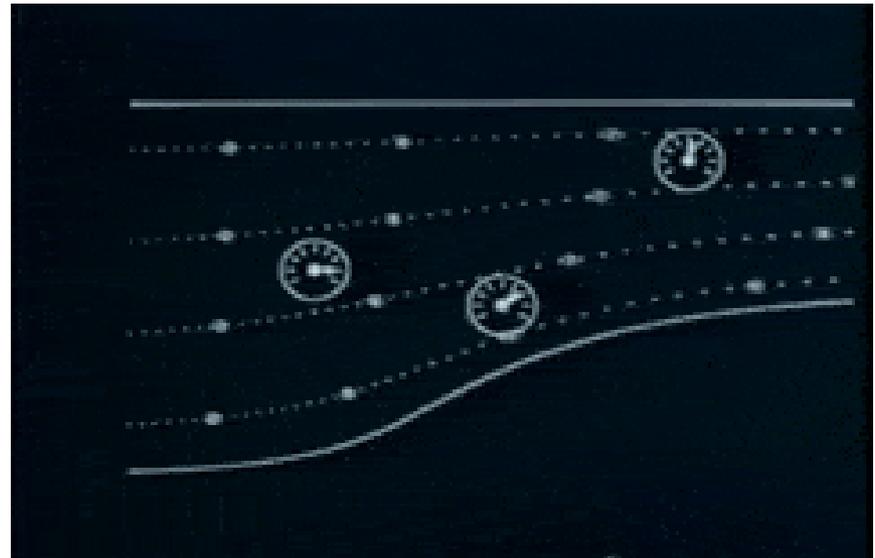
Elementos de la Mecánica de Fluidos Flujo estacionario

Mecánica de Fluidos es la ciencia que trata el comportamiento de los fluidos en reposo o en movimiento, así como de la interacción con sólidos u otros fluidos, en las fronteras o interfaces.



Flujo estacionario

- En un flujo estacionario, una variable no cambia con el tiempo en una posición especificada.
- Sin embargo, su valor puede cambiar de una posición a otra.
- En este tipo de flujo, todas las partículas que pasan por el mismo punto siguen la misma trayectoria (línea de corriente); los vectores velocidad permanecen tangentes a la trayectoria en cada punto.



Elementos de la Mecánica de Fluidos Flujo másico o gasto

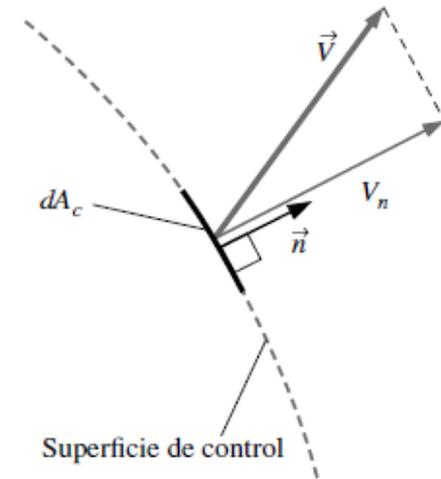
El flujo diferencial de un fluido con densidad ρ que fluye a través de un elemento de área dA_c en una sección transversal de ducto, con una componente de velocidad normal v_n al elemento de área es:

$$\delta\dot{m} = \rho v_n dA_c \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s} \right] [m^2] = \left[\frac{kg}{s} \right]$$

El flujo másico que cruza toda el área de la sección transversal de un ducto es:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta\dot{m} = \int_{A_c} \rho v_n dA_c$$

En un flujo incompresible ρ puede extraerse fuera de la integral. Sin embargo, la velocidad nunca es uniforme en la sección transversal en un ducto, debido a la condición de no deslizamiento en las paredes

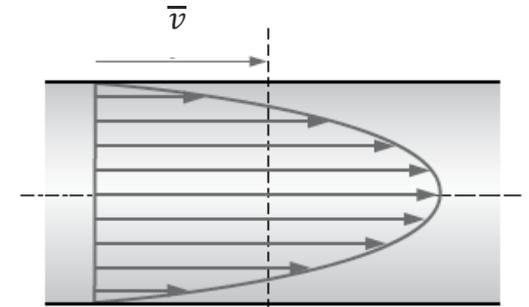


Elementos de la Mecánica de Fluidos Flujo másico o gasto

Dada una función $y = f(x)$, se define como valor medio de y , \bar{y} como $\bar{y}\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} y dx$.

Se define la velocidad promedio como $\bar{v}A_c = \int_{A_c} v_n dA_c \rightarrow \bar{v} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} v_n dA_c \rightarrow \bar{v}A_c = \int_{A_c} v_n dA_c$

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho v_n dA_c = \rho \underbrace{\int_{A_c} v_n dA_c}_{\bar{v}A_c} \rightarrow \dot{m} = \rho \bar{v}A_c \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s} \right] [m^2] = \left[\frac{kg}{s} \right]$$



Para flujo incompresible (ρ ctte) o compresible (ρ ctte en A_c); A_c denota el área de la sección transversal normal a la dirección del flujo.

Elementos de la Mecánica de Fluidos Flujo volumétrico, velocidad de masa

Flujo volumétrico o caudal

El caudal o flujo volumétrico se define como el volumen del fluido que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo

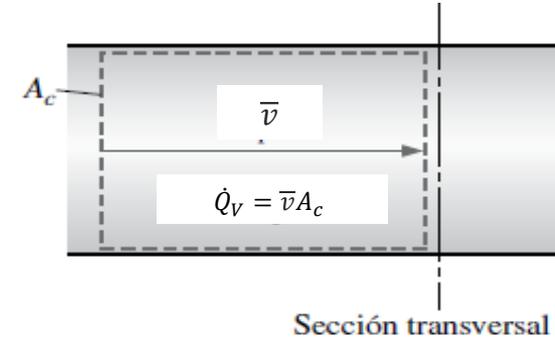
$$\dot{Q}_V = \int_{A_c} v_n dA_c = \bar{v} A_c \quad \left[\frac{m}{s} \right] [m^2] = \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

El flujo másico y el flujo están relacionados por la ecuación $\dot{m} = \rho \dot{Q}_V$

Velocidad de masa (G) o masa velocidad

$$\dot{m} = \rho \bar{v} A_c \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s} \right] [m^2] = \left[\frac{kg}{s} \right] \rightarrow \frac{\dot{m}}{A_c} = \rho \bar{v} = G \left[\frac{kg}{s.m^2} \right]$$

La ventaja de utilizar G consiste en su independencia de la temperatura y la presión cuando el flujo es estacionario (\dot{m} constante) y la sección transversal no varía (A_c constante). Este hecho es especialmente útil, cuando se consideran fluidos compresibles, en los cuales tanto \bar{v} como ρ varían con la temperatura y la presión.



Elementos de la Mecánica de Fluidos Principios de conservación

- Conservación de la masa
- Conservación de la energía
- Conservación del momento lineal

Conservación de la masa

Para un **sistema cerrado** la conservación de la masa se expresa como:

$$m_{sist} = \text{constante} \text{ o } \frac{dm_{sist}}{dt} = 0$$

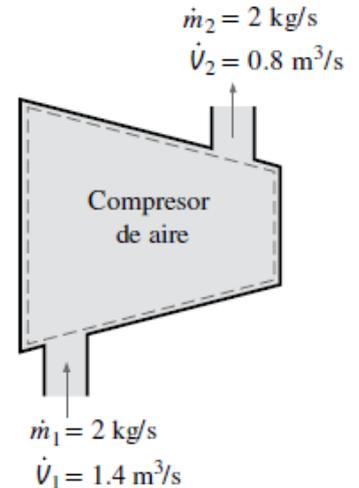
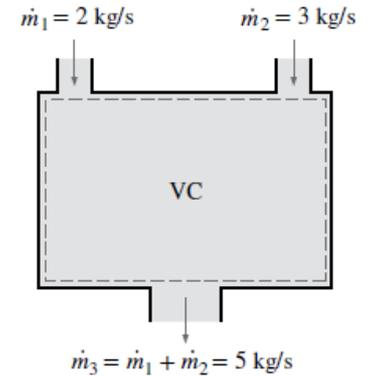
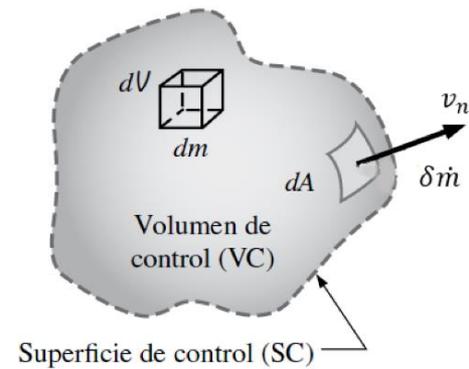
Para un **sistema abierto**, en el que se define un volumen de control (VC) de volumen \underline{V} y masa es m_{VC} :

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_{ent} \dot{m}_{ent} - \sum_{sal} \dot{m}_{sal}$$

\dot{m}_{ent} y \dot{m}_{sal} [$kg \cdot s^{-1}$] son los flujos másicos hacia dentro y hacia fuera del volumen de control

$\frac{dm_{VC}}{dt}$ es la tasa de cambio de la masa en el interior de ese volumen.

Para sistemas con una única entrada y salida: $\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} = \frac{dm_{VC}}{dt}$



Elementos de la Mecánica de Fluidos conservación de la masa, ecuación de continuidad

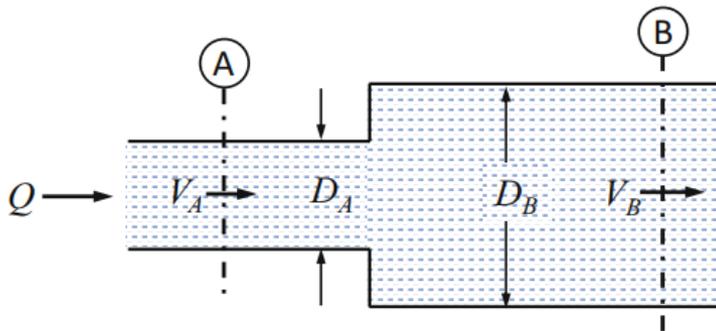
En un **flujo estacionario**, la cantidad total de masa contenida dentro de un volumen de control no cambia con el tiempo.

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = 0 \rightarrow \sum_{ent} \dot{m} = \sum_{sal} \dot{m}$$

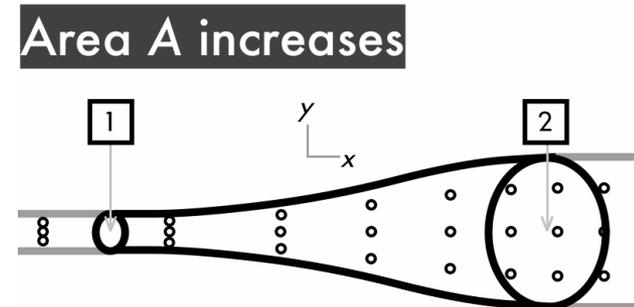
➤ flujo estacionario; una sola corriente: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 \bar{v}_1 A_1 = \rho_2 \bar{v}_2 A_2$ [kg.s⁻¹] **Ecuación de continuidad**

➤ flujo incompresible estacionario; una sola corriente: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho \bar{v}_1 A_1 = \rho \bar{v}_2 A_2$ [kg.s⁻¹] $\rightarrow \dot{Q}_{V1} = \dot{Q}_{V2}$ [m³.s⁻¹]

$\bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2$ [m³.s⁻¹] **Ecuación de continuidad para fluido incompresible**



$$\dot{Q}_{VA} = \frac{\pi D_A^2}{4} \bar{V}_A = \frac{\pi D_B^2}{4} \bar{V}_B = \dot{Q}_{VB} \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$



Area A increases

Speed v decreases

Elementos de la Mecánica de Fluidos principio de conservación de la cantidad de movimiento

El producto de la masa y de la velocidad de un cuerpo se llama momento lineal o cantidad de movimiento del cuerpo, y la cantidad de movimiento de un cuerpo rígido de masa m con velocidad \vec{v} es $m\vec{v}$.

2da Ley de Newton: La suma de fuerzas aplicada a una porción de fluido en la dirección de una línea de corriente s : $\sum F_s = ma_s$

La razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre ese

cuerpo. $\sum F_s = ma_s = m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_s)}{dt}$

La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero (se conserva la cantidad de movimiento de esos sistemas). Esto se conoce como el **principio de conservación de la cantidad de movimiento**.

La ecuación de Bernoulli (estricta) es establecida a partir de este principio; es una **relación aproximada** entre la presión, la velocidad y la elevación, y es válida en regiones de flujo estacionario en donde las fuerzas netas de fricción son despreciables,

Elementos de la Mecánica de Fluidos Ecuación de Bernoulli (estricta)

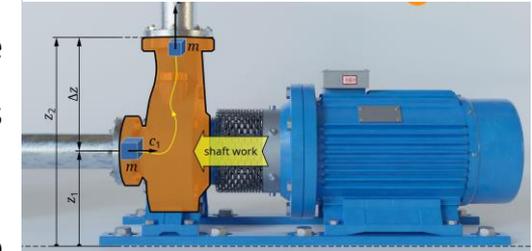
- No hay transferencia de energía como calor o trabajo
- No hay variación en la velocidad del fluido a través de la sección transversal
- Las fuerzas significativas que actúan en la dirección s son la presión (que actúa sobre ambos lados) y la componente del peso de la partícula en la dirección s , (W_s).



Daniel Bernoulli (1700-1782), matemático suizo formuló en 1738 el comportamiento en un texto escrito, cuando estaba trabajando en San Petersburgo, Rusia.

Originalmente formulada para escurrimientos ideales (o reversibles), la ecuación se extiende a flujos irreversibles potenciados por dispositivos mecánicos (ecuación de Bernoulli ampliada). En esta última formulación, la ecuación de Bernoulli es considerada como el balance **mecánico** de energía.

En este enfoque, los efectos térmicos debido a la irreversibilidad son tratados como pérdidas o disipación de energía.



La aproximación clave en la formulación original es que los efectos viscosos son despreciablemente pequeños en comparación con los efectos de inercia, gravitacionales y de la presión. Puesto que todos los fluidos tienen viscosidad (no existe un “fluido no viscoso”), esta aproximación no puede ser válida para un campo completo de flujo de interés práctico.

Elementos de la Mecánica de Fluidos Ecuación de Bernoulli (ideal o estricta)



En regiones del flujo en donde las fuerzas netas de fricción son despreciables, no hay bomba o turbina, y no hay transferencia de calor a lo largo de la línea de corriente, las fuerzas significativas que actúan en la dirección s son la presión (que actúa sobre ambos lados) y la componente del peso de la partícula en la dirección s .

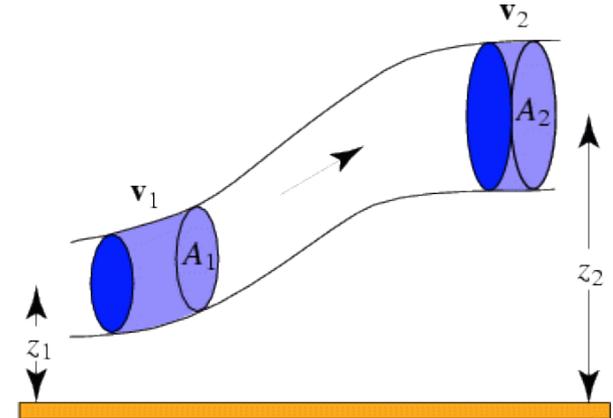
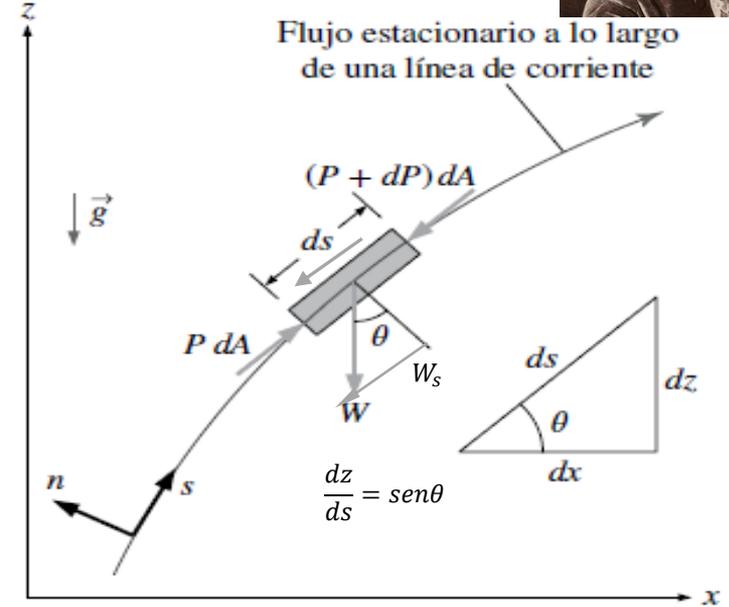
$$\sum F_s = ma_s \quad \sum F_s = PdA - (P + dP)dA - W \sin\theta$$

$$ma_s = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$PdA - (P + dP)dA - W \sin\theta = mv \frac{dv}{ds} \Rightarrow -dPdA - (\rho ds dA)g \frac{dz}{ds} = (\rho ds dA)v \frac{dv}{ds} \Rightarrow -dP - \rho g dz = \rho v dv$$

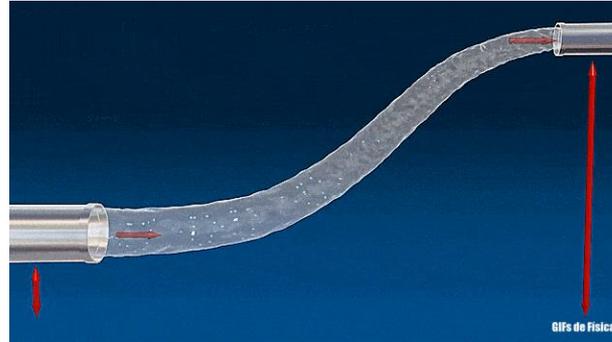
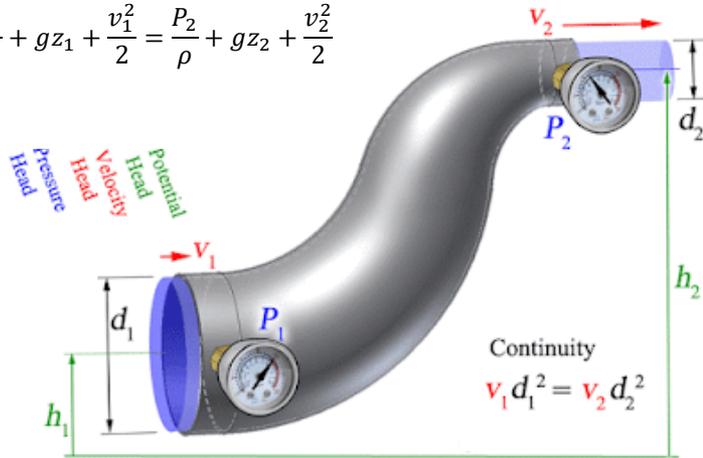
$$-\frac{dP}{\rho} - g dz = v dv \Rightarrow \frac{dP}{\rho} + g dz + v dv = 0 \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \equiv \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$$

$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g \Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} = 0$$



Elementos de la Mecánica de Fluidos Ecuación de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$



$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} = 0$$

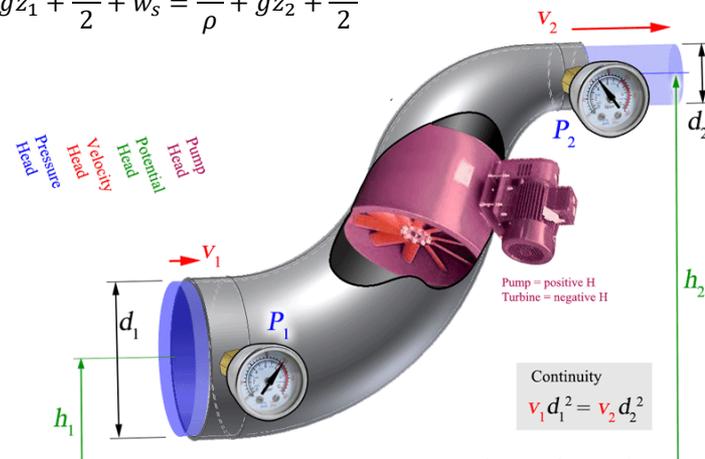
Cada término representa cambios en energía que pueden ser convertidos en cualquiera de los otros. $\int_1^2 \frac{dP}{\rho}$ es la diferencia de energía PV (o trabajo de expansión compresión) entre los puntos 1 y 2 ; $g\Delta z$ es diferencia en energía potencial (o de posición en un campo gravitatorio) y $\frac{\Delta(v^2)}{2}$ es diferencia en energía cinética. La integración para un fluido incompresible: $\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{ctte}$

Con transferencia de energía como trabajo

$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + w_s = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\frac{dP}{\rho} + gdz + vdv = w_s \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \equiv \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$$

$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} = w_s$$





Ecuación de energía:

$$q_{neta} + w_{neta} = H_2 - H_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \left[\frac{J}{kg} \right] \text{ En forma diferencial: } \delta q + \delta w = dH + vdv + gdz$$

Flujo estacionario ideal (en ausencia de irreversibilidades)

Procesos **cuasiestáticos** $\delta q = TdS$



$dH = TdS + VdP$

$$\delta q + \delta w = dH + vdv + gdz \rightarrow TdS = vdv + gdz + dH - \delta w$$

$$0 = vdv + gdz + VdP - \delta w \rightarrow \delta w = VdP + vdv + gdz \rightarrow \delta w = \frac{dP}{\rho} + vdv + gdz \text{ Ecuación de Bernoulli ideal}$$

Flujo estacionario no ideal

Procesos **irreversibles** $\delta q < TdS$



$dH = TdS + VdP$

$$\delta q + \delta w = dH + vdv + gdz \rightarrow TdS > vdv + gdz + dH - \delta w$$

$$0 > vdv + gdz + VdP - \delta w \rightarrow \delta w > VdP + vdv + gdz \rightarrow \delta w > \frac{dP}{\rho} + vdv + gdz$$

$$\delta w = vdv + gdz + VdP + de_L \rightarrow \delta w = \frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + de_L \text{ Ecuación de Bernoulli no ideal}$$

Los términos δw y de_L son cambios unidireccionales; de_L siempre toma energía de los otros términos y es equivalente a $\delta q < TdS$ (2do Principio)



Elementos de la Mecánica de Fluidos Ecuación de Bernoulli (ampliada)

$$\delta w = \frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + de_L$$

$$w_s = \int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} + e_L \quad J \cdot kg^{-1}$$

Principio de la conservación de la energía mecánica

Flujo **ideal e incompresible** y $w_s = 0$ $\frac{P}{\rho} + gz + \frac{\alpha v^2}{2} = ctte$

Flujo **incompresible** $w_s = \frac{\Delta P}{\rho} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} + e_L \rightarrow \frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + w_s = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + e_L$

Flujo **compresible** $w_s = \int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} + e_L$

Flujo **compresible** isotérmico, gas ideal. Si $\rho = \frac{P}{RT} \rightarrow \int \frac{dP}{\rho} = RT \int \frac{dP}{P} = RT \ln P \Rightarrow w_s = RT \ln \frac{P_2}{P_1} + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} + e_L$

Flujo **compresible** politrópico, gas ideal. Si $\frac{P}{\rho^k} = C = ctte; 1 < k \leq \gamma = \frac{c_P}{c_V} \rightarrow \rho = C^{-\frac{1}{k}} P^{\frac{1}{k}} \rightarrow \int \frac{dP}{\rho} = \int C^{\frac{1}{k}} P^{-\frac{1}{k}} dP$

γ coeficiente de dilatación adiabática

$$\left[\frac{k}{k-1} \right] C^{\frac{1}{k}} \left(P_2^{-\frac{1}{k+1}} - P_1^{-\frac{1}{k+1}} \right) = \left[\frac{k}{k-1} \right] C^{\frac{1}{k}} P_1^{-\frac{1}{k+1}} \left(\frac{P_2^{-\frac{1}{k+1}}}{P_1^{-\frac{1}{k+1}}} - 1 \right) = \left[\frac{k}{k-1} \right] \frac{P_1}{\rho_1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$w_s = \left[\frac{k}{k-1} \right] \frac{P_1}{\rho_1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + g\Delta z + \frac{\Delta(v^2)}{2} + e_L$$

Número de Mach $Ma = \frac{v}{v_{sound}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{RT\gamma}{M}}} \rightarrow$ si $Ma < 0,3$, la ecuación difiere respecto a la ecuación de flujo incompresible en menos de un 2%

Aire, $\gamma \cong 1,4$; $M = 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Para aire, a 25°C , la máxima velocidad admitida es menor a $104 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

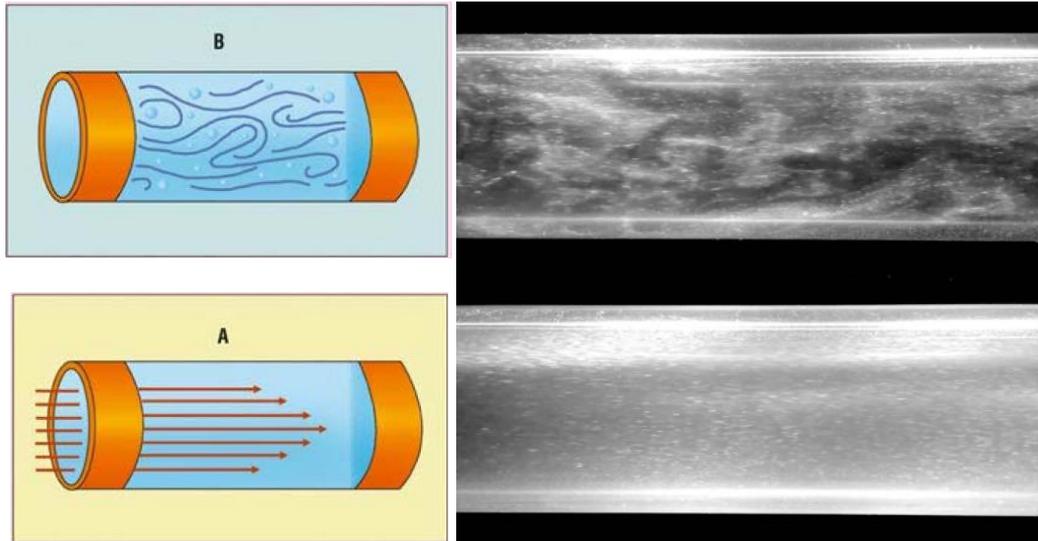
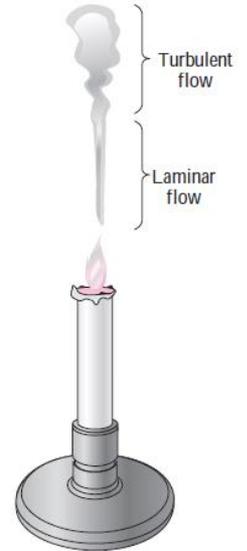


Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo laminar y flujo turbulento

El movimiento ordenado de un fluido, caracterizado por capas no alteradas de éste, se conoce como **laminar**. La palabra laminar proviene del movimiento de partículas juntas adyacentes del fluido, en “láminas”.

El movimiento desordenado de un fluido, que es común se presente a velocidades altas y se caracteriza por fluctuaciones en la velocidad, se llama **turbulento**.

Un flujo que se alterna entre laminar y turbulento se conoce como de **transición**



Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo laminar y flujo turbulento, el experimento de Reynolds



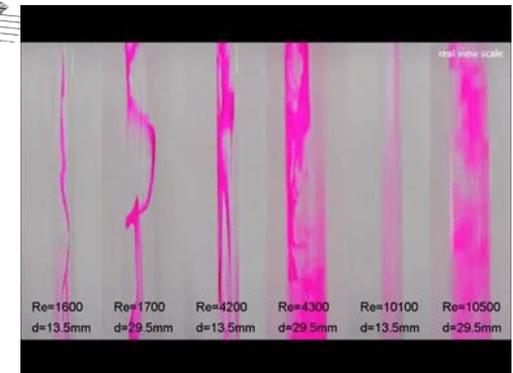
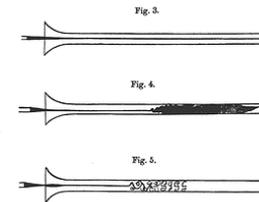
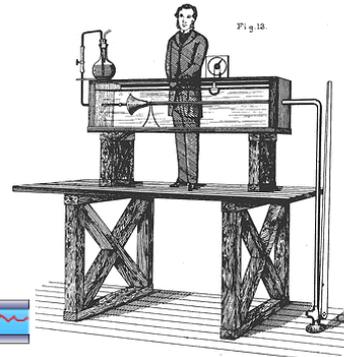
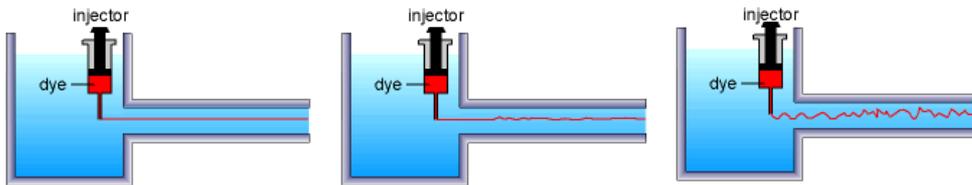
Osborne Reynolds
1842-1912

Los experimentos de Osborn Reynolds en la década de 1880 dieron como resultado el establecimiento del número adimensional de Reynolds, (Re), como el parámetro clave para determinar el régimen de flujo

Estudió las condiciones bajo las cuales un tipo de flujo cambia a otro; encontró que la velocidad crítica, a la cual el flujo laminar cambia a flujo turbulento, depende de cuatro variables: el diámetro del tubo D (o una propiedad dimensional equivalente), μ , ρ \bar{v} . Estos cuatro factores se combinan formando el grupo adimensional Re ; el cambio en el tipo de flujo ocurre para un valor definido del mismo.

$Re = \frac{D\bar{v}\rho}{\mu} = \frac{D\bar{v}}{\nu} \quad [m] \left[\frac{m}{s} \right] \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m \cdot s}{kg} \right] = []$; $Re \leq 2100$ flujo o régimen laminar; $2100 \leq Re \leq 4000$ región de transición; $Re \geq 4000$ flujo o régimen turbulento

D : propiedad geométrica con dimensión de longitud

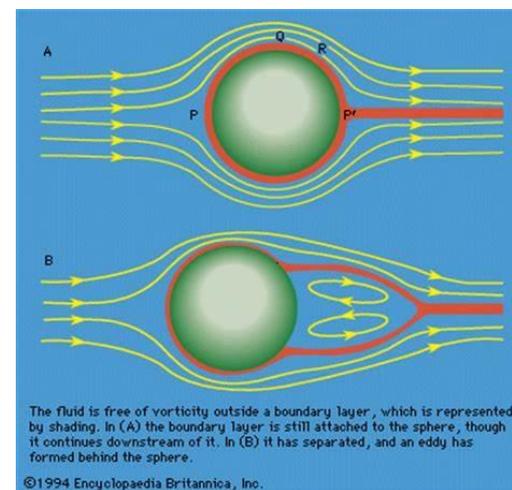


Asimismo, se define un número de Reynolds para fluidos no newtonianos

<https://youtu.be/pae5WrmDzUU>

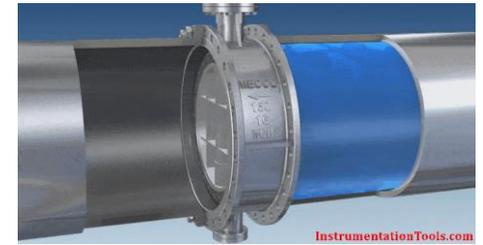
Elementos de la Mecánica de Fluidos la condición límite de no-deslizamiento

- El flujo de fluidos es afectado por superficies sólidas. El fluido en movimiento llega a detenerse por completo en la superficie
- Una capa de fluido en contacto directo con un sólido se adhiere a la superficie debido a los efectos viscosos (fuerzas de cohesión) y no hay deslizamiento. Esta característica es la **condición de no deslizamiento**. a capa que adhiere a la superficie desacelera la capa adyacente, y ésta a la siguiente sucesivamente.
- La condición de no-deslizamiento es responsable del desarrollo de un perfil de velocidad. La región del fluido adyacente a la pared, en la cual los efectos viscosos (y, por consiguiente, los gradientes de velocidades) son significativos se llama **capa límite**.
- Otra consecuencia de la condición de no-deslizamiento es el arrastre de superficie: es la fuerza que ejerce un fluido sobre una superficie en la dirección de flujo. Cuando se fuerza a un fluido a moverse sobre una superficie curva, como el lado posterior de un cilindro, con una velocidad suficientemente elevada, la capa límite ya no puede permanecer adherida a la superficie y, en algún punto, se separa de ella; este fenómeno se conoce como separación del flujo.

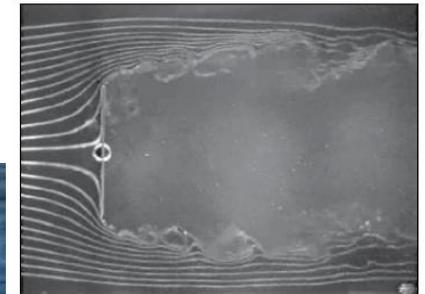
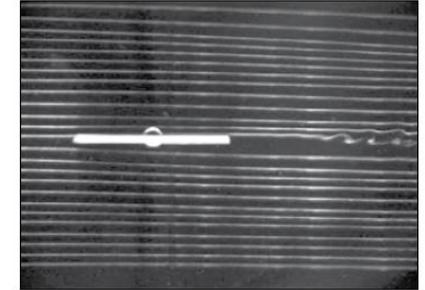
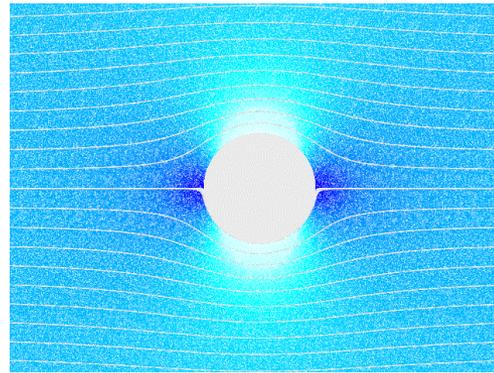


Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, flujo externo

➤ El flujo en un tubo o ducto es **flujo interno** si el fluido queda limitado por superficies sólidas; están dominados por la influencia de la viscosidad en todo el campo de flujo.



➤ *Flujo externo*: el flujo alrededor de cuerpos que están inmersos en un fluido. Un flujo externo **no está limitado** por una superficie. Los efectos viscosos están confinados a una porción del campo de flujo, limitados a la capa límite cercana a las superficies sólidas y a las regiones de la estela, corriente abajo de los cuerpos. Estas regiones están rodeadas por una región externa de flujo caracterizada por bajos gradientes de velocidad y temperatura. De la interacción resultan dos tipos de fuerzas: de sustentación (*Lift*) y arrastre (*Drag*).



Operaciones Unitarias 1

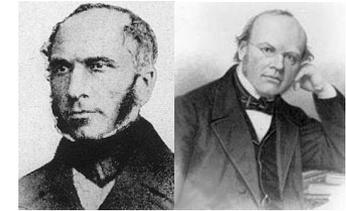
Elementos de la mecánica de fluidos

- Cuantificación de la irreversibilidad. Fluidos Newtonianos

Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, cuantificación de la irreversibilidad; Ecuación de Darcy -Weisbach

Considerar flujo estacionario en un tubo horizontal de un fluido de densidad constante y flujo completamente desarrollado.

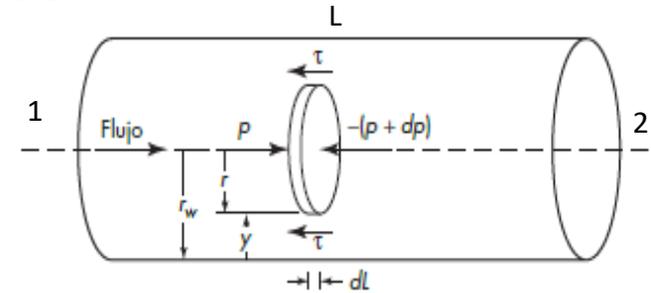
Considerar un elemento de fluido con forma de disco concéntrico con el eje del tubo, de radio r y longitud dL , como cuerpo libre sujeto a fuerzas debido a la presión y fuerza viscosa. Dado que el conducto es horizontal $F_{gravedad}$ idéntica en todos sus puntos y la velocidad es constante, el balance de momento determina que $\sum F = 0$



Henry Philibert Gaspard Darcy (1803 - 1858)

Julius Ludwig Weisbach (1806 -1871)

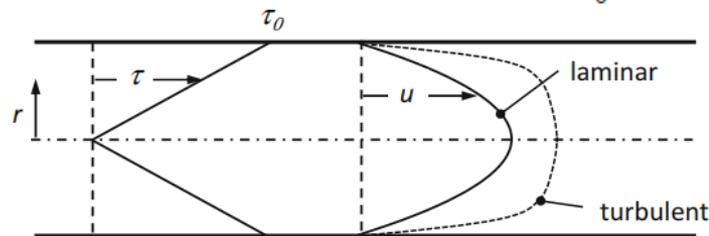
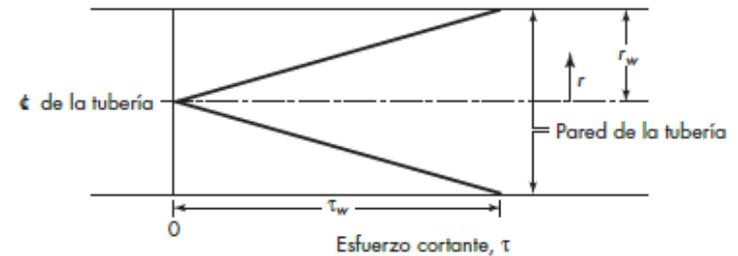
$$\sum F = P\pi r^2 - (P + dP)\pi r^2 - 2\pi r dL \tau = 0 \quad \text{Dividiendo por } \pi r^2 dL \Rightarrow \frac{dP}{dL} + \frac{2\tau}{r} = 0$$

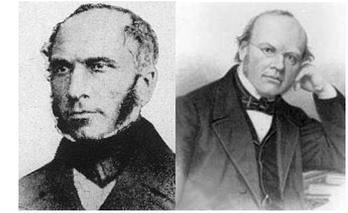
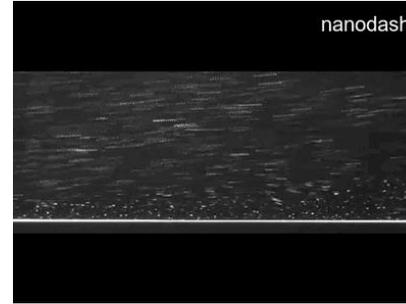
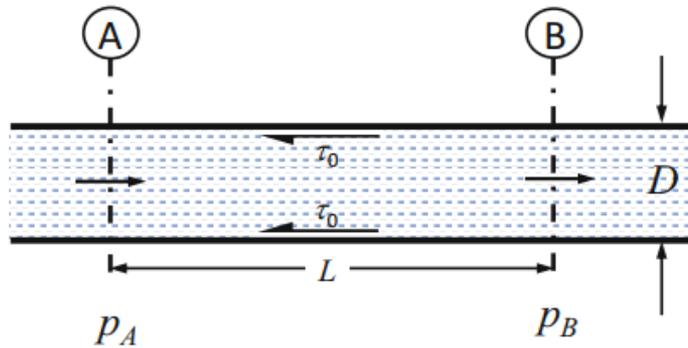


En flujo estacionario, ya sea laminar o turbulento, la presión es constante en una sección transversal cualquiera de un tubo con corriente, por lo tanto,

$$\frac{dP}{dL} + \frac{2\tau_o}{r_o} = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{r} = \frac{\tau_o}{r_o}$$

$\frac{dP}{dL}$ es independiente de r . En la pared del conducto, $r = r_o$ y $\tau = \tau_o$.





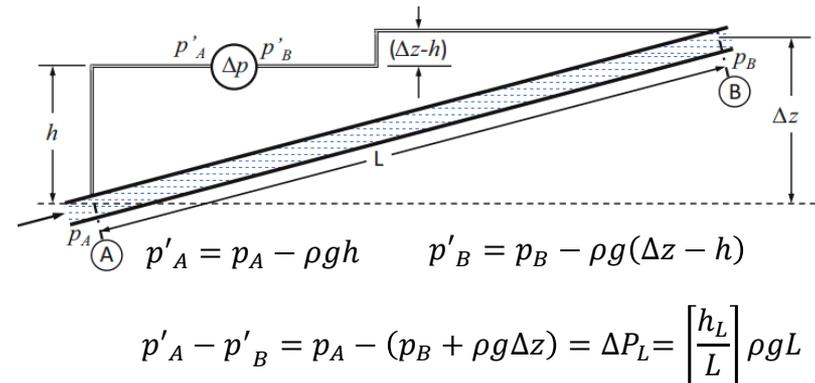
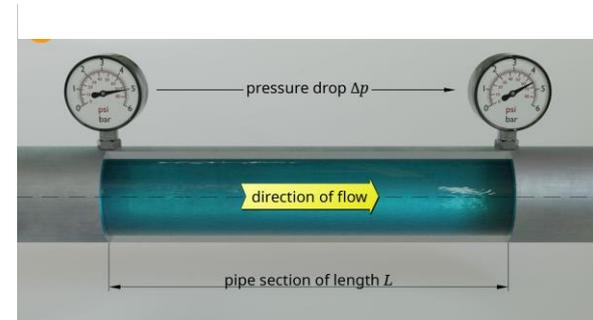
$$\frac{dP}{dL} + \frac{2\tau_0}{r_0} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dL} + \frac{4\tau_0}{D} = 0 \rightarrow -\frac{dP}{dL} = \frac{4\tau_0}{D} \rightarrow -dP = \frac{4\tau_0}{D} dL$$

$$-\int_{P_A}^{P_B} dP = \frac{4\tau_0}{D} \int_0^L dL \rightarrow -(P_B - P_A) = -\Delta P_L = \frac{4\tau_0}{D} L$$

$-\Delta P_L = 4\tau_0 \frac{L}{D}$; ecuación de **caída de presión** debido a los efectos de la irreversibilidad [Pa]. $\Delta P_L/L$ es el gradiente de presión

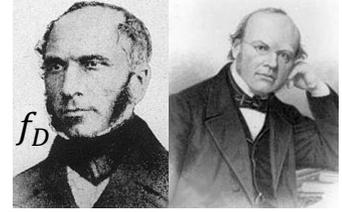
$e_L = \frac{-\Delta P_L}{\rho} = \frac{4\tau_0 L}{\rho D}$; ecuación de **disipación de energía** (o pérdida por fricción) debido a los efectos de la irreversibilidad [$J.kg^{-1}$]

$h_L = \frac{-\Delta P_L}{\rho g} = \frac{4\tau_0 L}{\rho g D}$; ecuación de **perdida de carga** debido a los efectos de la irreversibilidad [m]. $[h_L/L]$ es el gradiente hidráulico.



Ecuación de Bernoulli, para **flujo incompresible**:

$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + w_s = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + e_L \quad e_L = \frac{4\tau_o L}{\rho D}$$



El factor de fricción es el parámetro utilizado para la correlación de los efectos de flujo. Se define como: $f_f = \frac{\tau_o}{\rho \frac{v^2}{2}}$

$$e_L = \frac{4\tau_o L}{\rho D} \rightarrow e_L = 4 \frac{L}{D} \frac{1}{\rho} f_f \rho \frac{v^2}{2} \Rightarrow e_L = f_D \frac{L}{D} \frac{v^2}{2}$$



John Thomas Fanning (1837–1911)

Ecuación definida en términos de energía por unidad de masa: $[J \cdot kg^{-1}] \equiv [m^2 s^{-2}]$

$$\text{En términos de caída de presión: } \Delta P_L = f_D \frac{L}{D} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \quad [Pa] \equiv [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]$$

$\Delta P_L = \text{función}(L, D, \bar{v})$. $\Delta P_L \propto \rho \frac{\bar{v}^2}{2}$ presión dinámica conversion irreversible de energia mecanica cuando el

fluido en movimiento se detiene. También $\Delta P_L \propto \frac{L}{D}$; mayor pérdida de carga a mayor longitud y menor diámetro de ducto.

$$\text{En términos de la altura de la columna de fluido equivalente, o pérdida de carga: } h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f_D \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad [m]$$

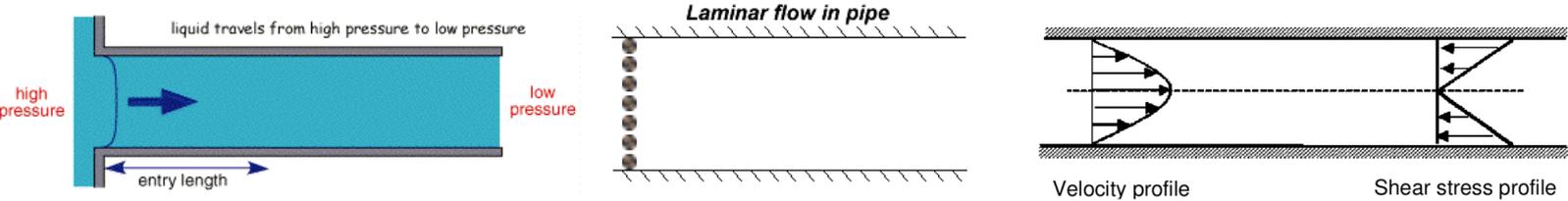
f_D es el factor de fricción de Darcy. f_f es el factor de fricción de Fanning. $f_D = 4f_f$

Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, cuantificación de la irreversibilidad; dependencia f_D régimen de flujo

Del análisis dimensional y experimentación los parámetros que influyen el factor de fricción son el número de Reynolds y la rugosidad relativa del ducto. La dependencia está determinada por el tipo de flujo

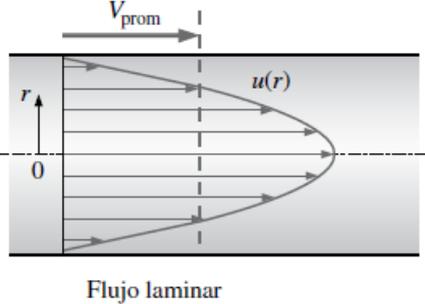
Flujo laminar

Un régimen de flujo es laminar, cuando en cada sección de conducto, normal al eje, todas las líneas de corriente son paralelas y se desplazan paralelas al eje del conducto. El diagrama de distribución de velocidades en un plano axial es una parábola de segundo grado. La velocidad es máxima en el eje del conducto y cero en contacto con la pared.



El factor de fricción solo depende del número de Reynolds; De la relación entre las ecuaciones de Hagen – Poiseuille y la ecuación de Darcy es posible demostrar que:

$$\Delta P_L = \frac{32\mu \bar{v}L}{D^2} \quad \Delta P_L = f_D \frac{L}{D} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \Rightarrow f_D = \frac{64}{Re}$$

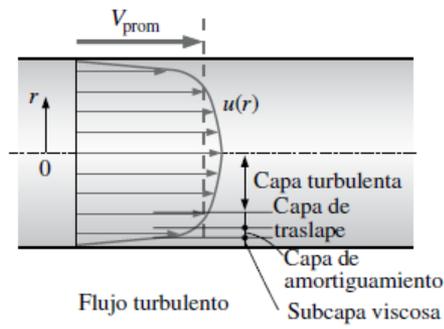


Un flujo con una velocidad de distribución constante se llama *flujo totalmente desarrollado*.

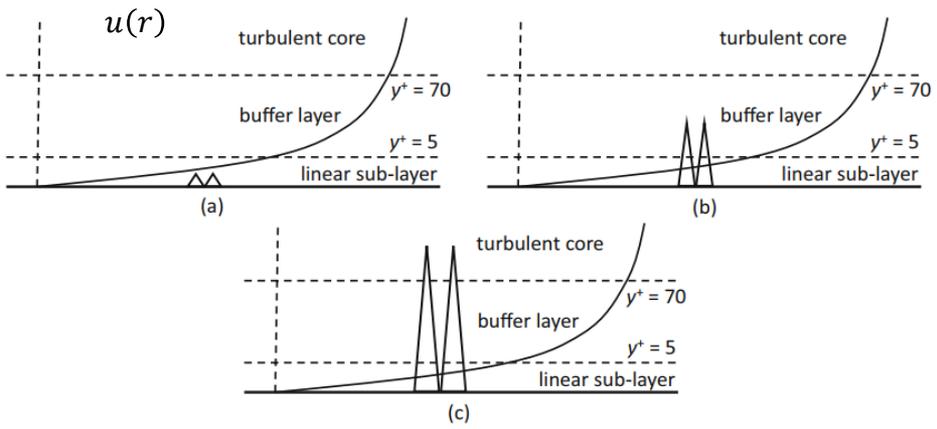
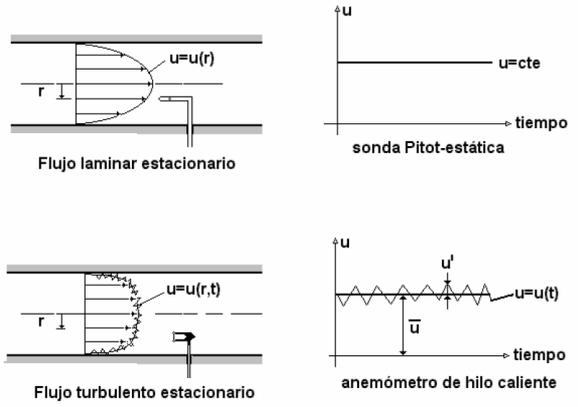
Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, cuantificación de la irreversibilidad; dependencia f_D régimen de flujo

Flujo turbulento:

Un régimen de flujo es turbulento cuando, por incremento de la velocidad, se rompe la regularidad del escurrimiento con formación de torbellinos. Las líneas de corriente no son paralelas. El diagrama de distribución de velocidades toma una forma achatada. El escurrimiento es laminar en una capa adyacente a la interfase ducto – fluido.



Debido a la condición de no deslizamiento, en la zona de contacto fluido solido hay una capa fluida adherida al sólido, con velocidad relativa nula. Esta es la capa límite. Para régimen turbulento, el pasaje de este régimen, que ocurre desde el seno del fluido que escurre, al reposo en la capa adherida a la pared se produce a través de una capa de escurrimiento laminar y de una de transición.

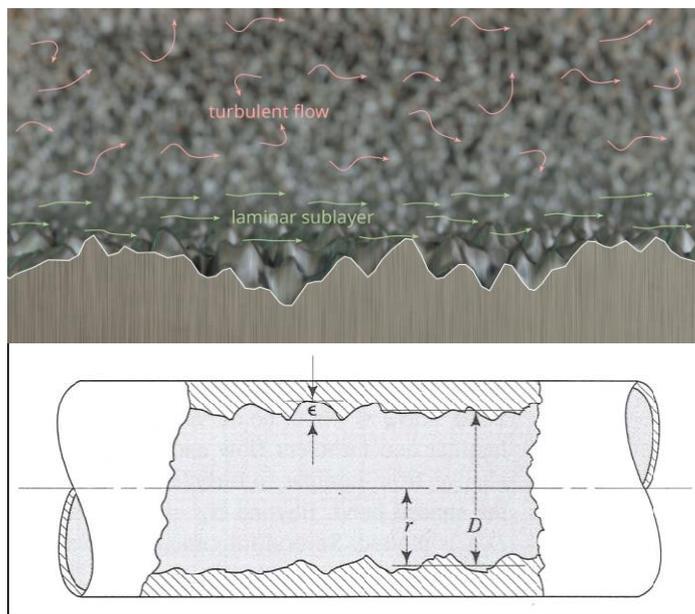


Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, cuantificación de la irreversibilidad; dependencia f_D régimen de flujo

Flujo turbulento:

El factor de fricción depende del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo La rugosidad relativa se define como la relación de la altura media de rugosidad de la tubería al diámetro de la tubería, $\frac{\epsilon}{D}$.

La forma funcional de esta relación no se puede obtener a partir de un análisis teórico, y todos los resultados disponibles se obtienen a partir de experimentos.



La rugosidad relativa de las tuberías puede aumentar con el uso, como un resultado de la corrosión, la acumulación de sarro y la precipitación. En este caso, un factor de contingencia puede ser agregado al valor de ϵ , (generalmente 1,3). Como consecuencia, el factor de fricción puede aumentar por un factor de 5 a 10.

Material	ϵ (mm)
Vidrio	0.0003
PVC	0.0015
Poliétileno (PE)	0.002
Asbesto cemento	0.030
Acero	0.046
Hierro forjado	0.06
Hierro fundido asfaltado	0.12
Hierro galvanizado	0.15
Arcilla vitrificada	0.15
Hierro fundido	0.15
Hierro dúctil	0.25
Madera cepillada	0.18 -0.9
Concreto	0.3 -3.0
Acero bridado	0.9 - 9

Valores de rugosidad equivalentes para tuberías comerciales nuevas*

Material	Rugosidad ϵ	
	ft	mm
Vidrio, plástico	0 (liso)	
Concreto	0.003-0.03	0.9-9
Duela de madera	0.0016	0.5
Hule, alisado	0.000033	0.01
Tubería de cobre o latón	0.000005	0.0015
Hierro fundido	0.00085	0.26
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Hierro forjado	0.00015	0.046
Acero inoxidable	0.000007	0.002
Acero comercial	0.00015	0.045

* La incertidumbre en estos valores puede ser hasta ± 60 por ciento.

Elementos de la Mecánica de Fluidos flujo interno, cuantificación de la irreversibilidad; rugosidad

TABLE 4.5 Recommended Surface Roughness Values for Various Piping Materials

Pipe Material	Surface Roughness (m)	Surface Roughness (ft)
Copper, drawn, tubing	0.000002	0.0000067
Glass, drawn tubing	0.000002	0.0000067
Plastic, drawn tubing	0.000002	0.0000067
Brass, drawn	0.000002	0.0000067
Iron, cast—new	0.0003	0.0021
Iron, wrought—new	0.000045	0.00017
Iron, galvanized	0.00015	0.0005
Iron, asphalt coated	0.00015	0.0005
Steel, new	0.000045	0.00015
Steel, lightly corroded	0.0003	0.00125
Steel, heavily corroded	0.002	0.0067
Steel, galvanized	0.00015	0.0005
Steel, polished (hygienic)	0.000002	0.0000067
Steel, stainless, drawn tubing	0.000002	0.0000067
Sheet metal ductwork, smooth joints	0.00003	0.0001
Concrete, very smooth	0.00004	0.00013
Concrete, wood floated, brushed	0.0003	0.001
Concrete, rough, visible form marks	0.002	0.0067
Rubber, smooth tubing	0.00001	0.000033
Rubber, wire reinforced	0.001	0.0033

Never use a value less than 0.0000015 m or 0.000005 ft, which are the limiting values that define a “smooth” pipe [10].

Elementos de la Mecánica de Fluidos, cuantificación de la irreversibilidad; gráfica de Moody y ecuaciones asociadas

Para flujo turbulento, la relación entre el factor de fricción de Darcy, el número de Re y la rugosidad relativa $\frac{\varepsilon}{D}$ está determinada en la ecuación de **Colebrook** (1939):

$$\frac{1}{\sqrt{f_{DCb}}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7065} + \frac{2,5256}{Re\sqrt{f_D}} \right)$$

Si $\varepsilon = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_D}} = 2,0 \log(Re\sqrt{f_D}) - 0,8$; ecuación de Prandtl. Si $Re = \infty \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_D}} = -2,0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)$ flujo turbulento totalmente rugoso; ecuación de von Karman

La ecuación de Colebrook es implícita en f_D y es solo válida para flujo turbulento; Para flujo laminar $f_D = \frac{64}{Re}$

Ecuación de **Churchill - Usagi** (1977), para cualquier Re (flujo laminar, región de transición y turbulento):

$$f_{DChu} = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + (A + B)^{-1,5} \right]^{\frac{1}{12}} \quad \text{donde } A = \left\{ -2,457 \ln \left[\left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\varepsilon}{D} \right] \right\}^{16} \quad \text{y } B = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

Elementos de la Mecánica de Fluidos, cuantificación de la irreversibilidad; gráfica de Moody y ecuaciones asociadas

Ecuación de **Chen** (1979) para cualquier *Re* (flujo laminar, región de transición y turbulento):

$$\frac{1}{\sqrt{f_{DChen}}} = -2,0 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3,7065} - \frac{5,0452}{Re} \log \left(\frac{1}{2,8257} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right]$$

COMMUNICATIONS

An Explicit Equation for Friction Factor in Pipe

A single explicit equation correlating friction factor, pipe roughness, diameter, and Reynolds number for transition and turbulent flow regions is proposed with the same accuracy as the implicit Colebrook equation.

Ind. Eng. Chem. Fundam., Vol. 18, No. 3, 1979 297

Literature Cited

- Churchill, S. W., *Chem. Eng.*, 91 (Nov 7, 1977).
- Colebrook, C. F. J., *J. Inst. Civil Eng.*, 133 (1939).
- Moody, L. F., *Trans. ASME*, 66, 641 (1944).
- Nikuradse, J., *Forsch. Arb. Ing. Wes.*, No. 256 (1932).
- Von Kármán, T., *Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I*, 5, 68-76 (1930).
- Wood, D. J., *Civil Eng.*, 66-67 (Dec. 1966).

Department of Chemical Engineering **Ning Hsing Chen**
University of Lowell
Lowell, Massachusetts 01854

https://en.wikipedia.org/wiki/Darcy_friction_factor_formulae

Ecuación de **Swamee–Jain** (1976) para *Re*>2300 (región de transición y turbulento):

$$f_{DSJ} = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 10^{-2} ; 5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^8 \text{ error} < 1\%$$

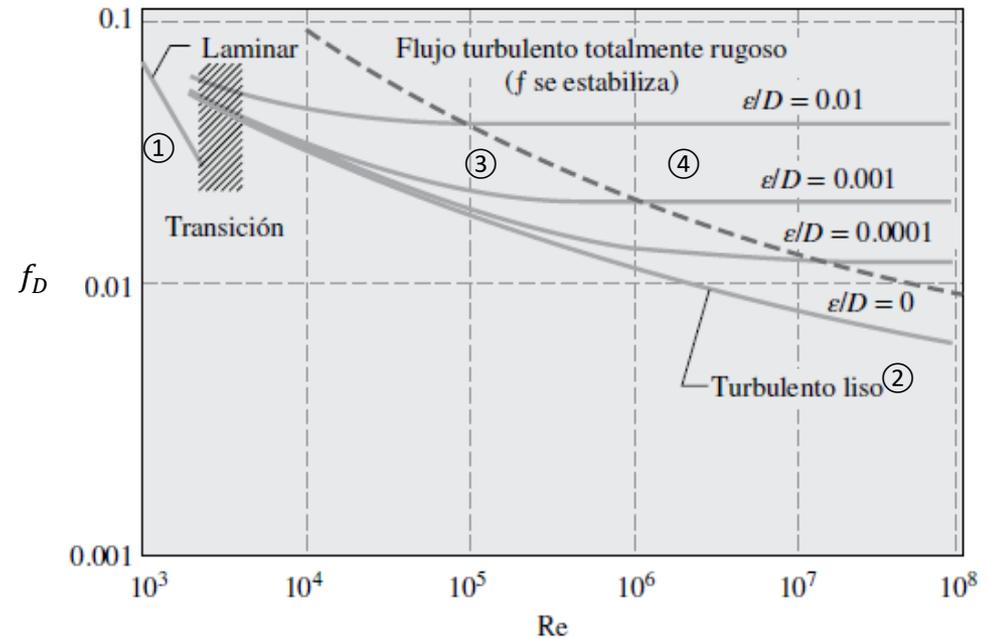
Elementos de la Mecánica de Fluidos, cuantificación de la irreversibilidad; gráfica de Moody y ecuaciones asociadas

① Régimen Laminar: las pérdidas de carga ocurren por intercambio de cantidad de movimiento y es independiente de la rugosidad de las paredes.

② Régimen turbulento y conducto de paredes lisas $\frac{\varepsilon}{D} = 0$; las pérdidas de energía se deben a torbellinos en el seno del fluido, sin influencia de la pared del ducto.

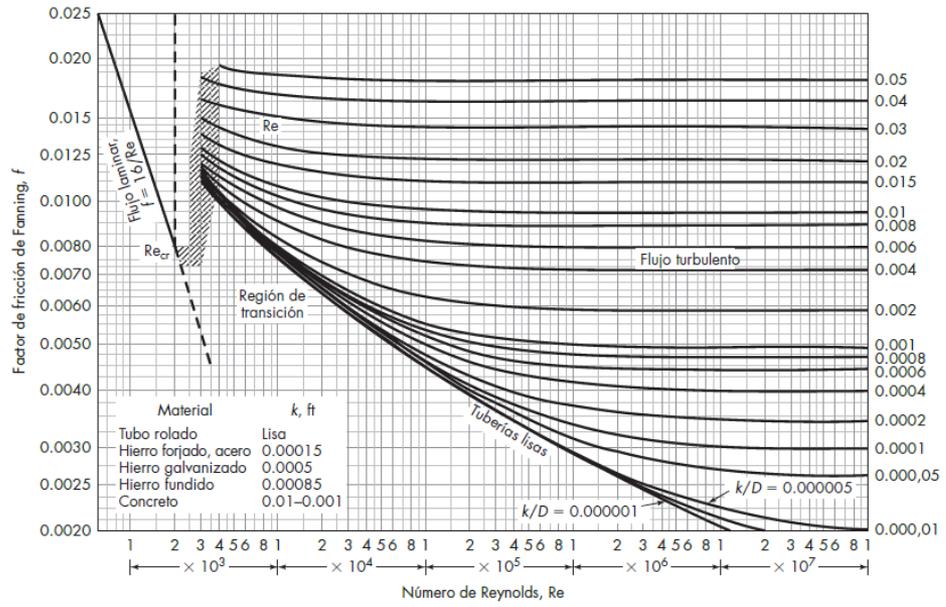
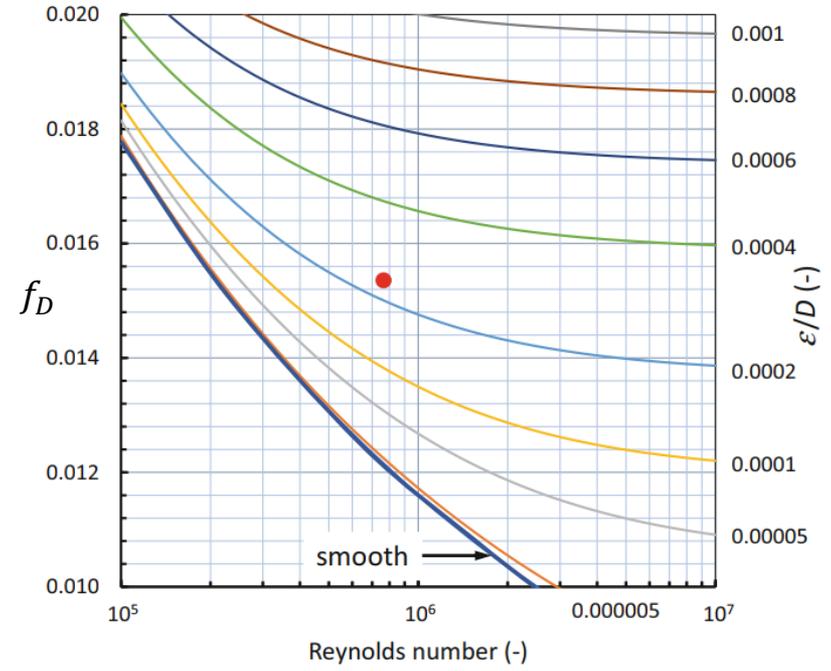
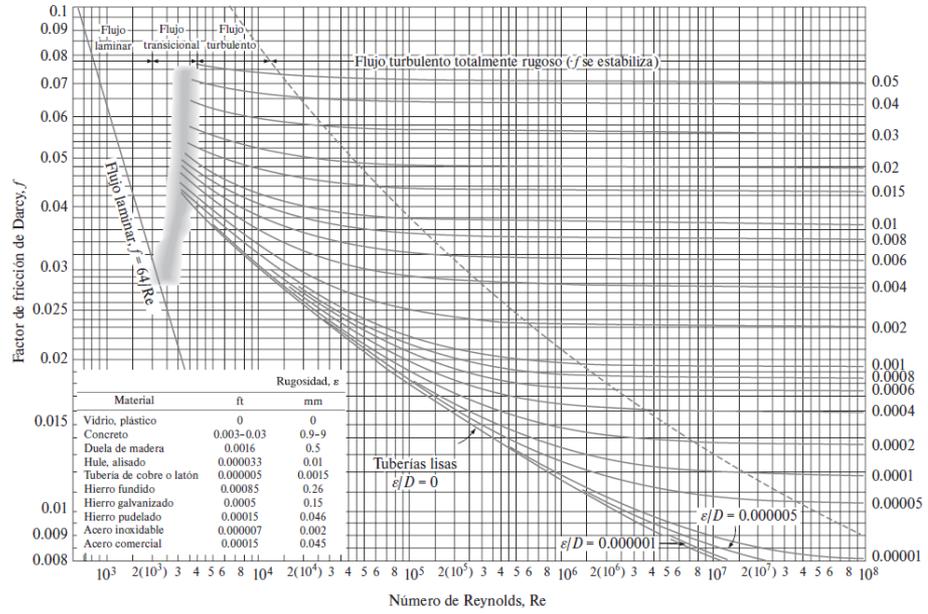
③ Corresponde a escurrimiento turbulento en un conducto rugoso.

④ Régimen altamente turbulento (altos valores de Re) y cañerías rugosas; el factor de fricción es independiente del Re siendo sólo función de la rugosidad relativa.



Aunque se concibió para tuberías circulares, también se puede usar para tuberías no circulares al sustituir el diámetro por el diámetro hidráulico

Elementos de la Mecánica de Fluidos, cuantificación de la irreversibilidad; gráfica de Moody y ecuaciones asociadas



Coeficiente de fricción de Fanning $C_f = \frac{f_D}{4}$

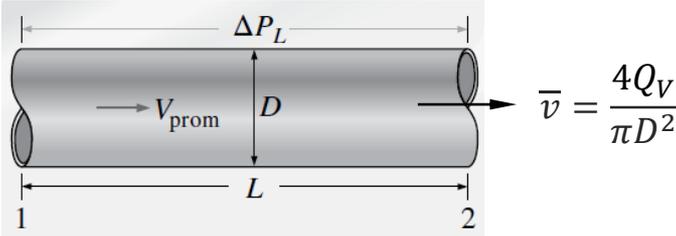
Operaciones Unitarias 1

Elementos de la mecánica de fluidos

- Cuantificación de la irreversibilidad. Fluidos No Newtonianos

Elementos de la Mecánica de Fluidos, cuantificación de la irreversibilidad; fluidos no Newtonianos

Fluido Newtoniano (μ constante); flujo laminar $D = 2R$ $\bar{v} = \frac{R^2 \Delta P_L}{8\mu L}$



Ecuación de Hagen-Poiseuille (EHP)

Fluido No Newtoniano $\vec{\tau} = K(\dot{\gamma})^n$; flujo laminar $\bar{v} = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left(\frac{\Delta P_L}{2LK}\right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}$

Si $n = 1$ se obtiene EHP con $\mu = K$; K coeficiente de consistencia; n índice reológico

Válido para fluidos no newtonianos que obedecen la ley de potencia (LP)

$$\Delta P_L = f_D \frac{L}{D} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \rightarrow f_D = 2 \frac{\Delta P_L}{L} \frac{D}{\rho \bar{v}^2} \Rightarrow f_D = 8 \left(\frac{6n+1}{n}\right)^n \frac{K \bar{v}^{n-2}}{\rho D^n}$$

f_D es el factor de fricción de Darcy. f_f es el factor de fricción de Fanning. $f_D = 4f_f$

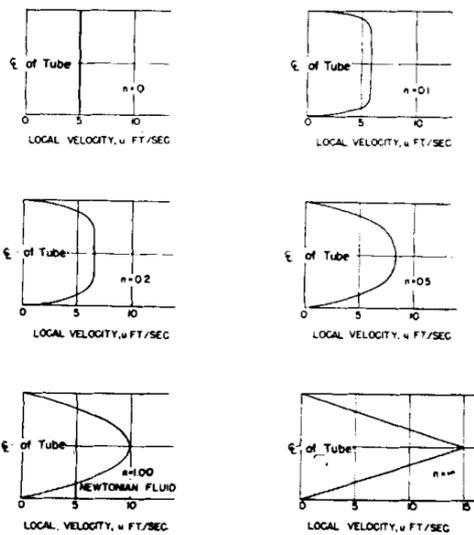


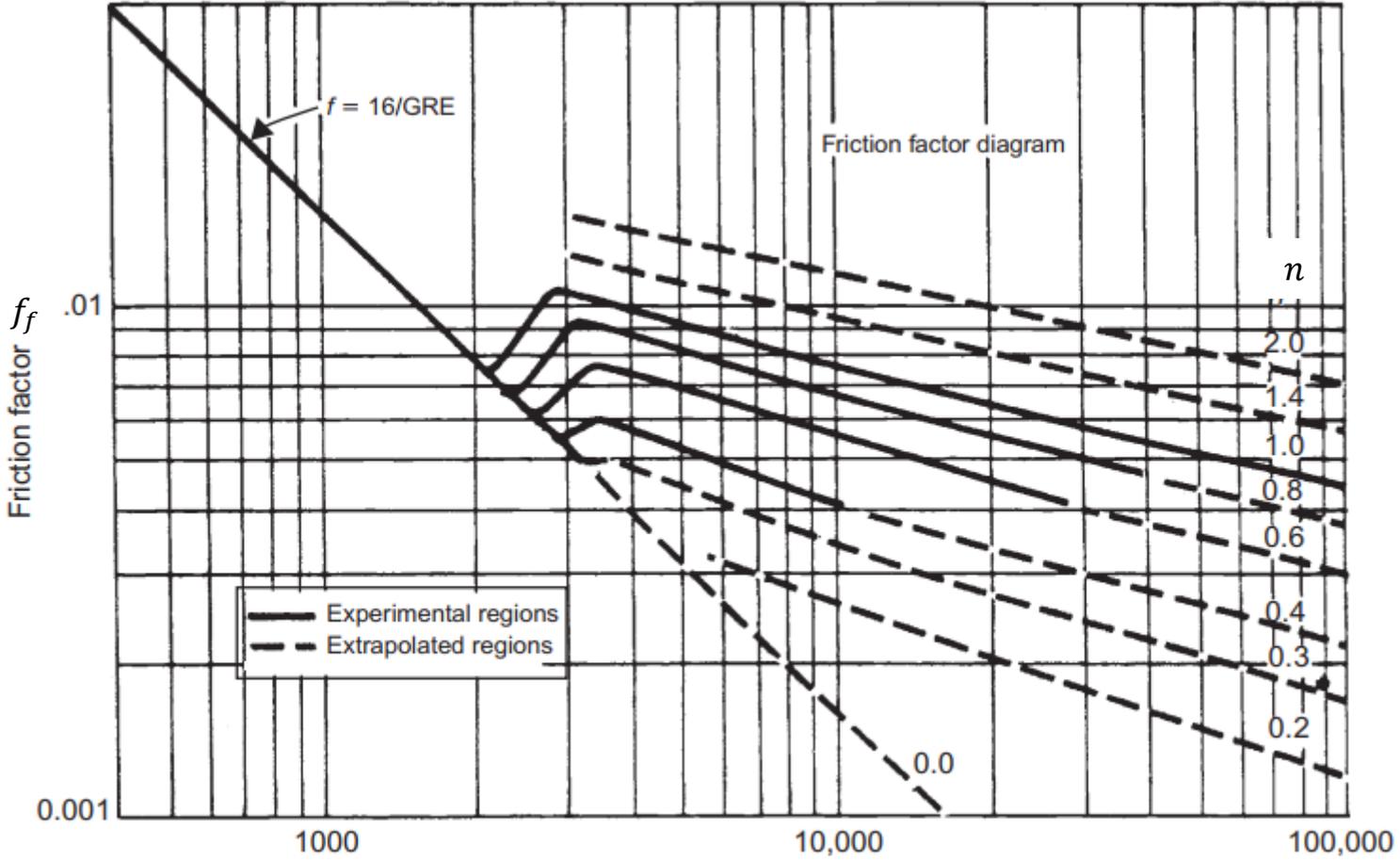
Fig. 1. Laminar velocity profiles for power-law fluids.

Fluido No Newtoniano; Número Generalizado de Reynolds $N_{Gre} = \frac{D^n \bar{v}^{2-n} \rho}{K 8^{n-1}} \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n$ Si $n = 1$; $Re = \frac{D \rho \bar{v}}{\mu}$ con $\mu = K$

En flujo laminar $f_D = \frac{64}{N_{Gre}}$; $f_f = \frac{16}{N_{Gre}}$ $N_{Gre} < \frac{6464n(2+n)^{\frac{(2+n)}{(1+n)}}}{(1+3n)^2} = N_{Gre,crit}$

RHEOLOGICAL METHODS IN
FOOD PROCESS ENGINEERING
Second Edition

James F. Steffe, Ph.D., P.E.
Professor of Food Process Engineering
Dept. of Food Science and Human Nutrition
Dept. of Agricultural Engineering
Michigan State University



en flujo turbulento

Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems

D. W. DODGE and A. B. METZNER
University of Delaware, Newark, Delaware

$$\frac{1}{\sqrt{f_{f,nN}}} = \left(\frac{4}{n^{0,75}}\right) \log \left[N_{GRe} f_{f,nN}^{\left(1-\frac{n}{2}\right)} \right] - \left(\frac{0,4}{n^{1,2}}\right)$$

New equation calculates friction factor for turbulent flow on non-Newtonian f...
N El-Emam; A H Kamel; M El-Shafer; A El-Batrawy
Oil & Gas Journal; Sep 22, 2003; 101, 36; ABI/INFORM Global
pg. 74

Factor de corrección de la Energía cinética, α conducto de sección circular

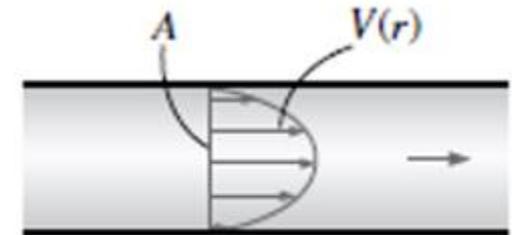
A un radio r de una sección transversal fluye con una $v(r)$ una porción $\delta\dot{m} = \rho v(r)dA$ de fluido. Su energía

cinética por unidad de masa es: $de_c = \frac{1}{2}(v(r))^2$, por lo que la energía cinética total en esta sección será $E_c =$

$\int_A \frac{1}{2}(v(r))^2 \delta\dot{m} = \frac{1}{2}\rho \int_A (v(r))^3 dA$. La energía cinética media es $E_{c,prom} = \frac{1}{2}\dot{m}\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\rho A\bar{v}^2$. Se define un factor

de corrección α :

$$\alpha = \frac{E_c}{E_{c,prom}} = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v(r)}{\bar{v}} \right)^3 \delta A$$



$\alpha = 2,0$ para el flujo laminar **newtoniano** totalmente desarrollado en un tubo.

$$\dot{m} = \rho V_{prom} A, \quad \rho = \text{constante}$$

Flujo laminar **no newtoniano**, fluido adelgazante;

$$\alpha = \frac{3(3n + 1)^2}{(2n + 1)(5n + 3)}$$

$1,04 \leq \alpha \leq 1,11$ para el flujo turbulento totalmente desarrollado en un ducto circular. Se adopta el valor $\alpha = 1$

$$\dot{W}_s + \dot{m} \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) = \dot{m} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{W}_{turb} + \dot{E}_{perdida\ mecánica} \quad \left[\frac{J}{s} \right]$$

$$H_s + \frac{P_1}{\rho_1 g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + H_{turb,ext} + h_L \quad [m]$$