TRABAJO PRÁCTICO Nº 2: “MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN”

1. Para cada uno de estos argumentos explicar qué reglas de inferencia se han utilizado en cada paso:

Trabajo Práctico N° 8 "Métodos de Demostración"

1) a) Alicia estudia matemáticas. Por tanto, Alicia estudia bién matemáticas o bien Ingeniería Informática.

$$\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \end{array}$$

Adición.

b) Patricia es una excelente nadadora. Si Patricia es una excelente nadadora, entonces puede trabajar como salvavidas. Por tanto, Patricia puede trabajar como salvavidas.

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Modus Ponens.

c) Si nieva hoy, se cerrará la Universidad. La Universidad no está cerrada hoy. Por tanto, no nieva hoy.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Modus tollens.

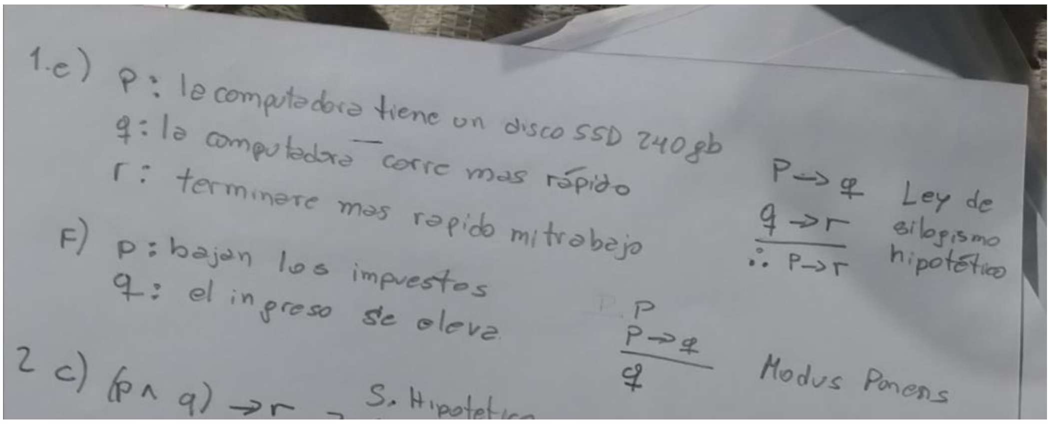
d) Si voy a nadar, entonces estaré al sol demasiado tiempo. Si estoy al sol demasiado tiempo, me quemaré. Por tanto, si voy a nadar me quemaré.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Silogismo hipotético.

e) Si la computadora tiene un disco SSD de 240 gb entonces la computadora corre más rapido. Si la computadora anda más rápido, terminaré más rápido mi trabajo. Por tanto, si la computadora tiene un disco SSD de 240 gb terminaré más rápido mi trabajo.

f)Bajan los impuestos. Si bajan los impuestos, entonces el ingreso se eleva. Por tanto, el ingreso se eleva.



1.e) p: la computadora tiene un disco SSD 240gb

q: la computadora corre mas rápido

r: terminare mas rapido mi trabajo

$P \to q$

$q \to r$

$\therefore P \to r$

Ley de silogismo hipotético

F) p: bajan los impuestos

q: el ingreso se eleva

P

$P \to q$

q

Modus Ponens

2 c) $(p \wedge q) \to r$ S. Hipotetico

2. Derivar la conclusión desde las premisas usando reglas de inferencia.

a) 1) $p \rightarrow q$

2) $q \rightarrow \sim r$

3) r

4) $p \vee (t \wedge s)$

$\therefore t \wedge s$

b) 1) $p \rightarrow (q \rightarrow s)$

2) $\sim r \vee p$

3) q

$\therefore r \rightarrow s$

c) $((p \wedge q) \Rightarrow r)$

$(r \Rightarrow \sim t)$

t

$\therefore (\sim p \vee \sim q)$

② Derivar la conclusión desde las premisas usando reglas de inferencia.

a) 1) $p \to q$
2) $q \to \sim r$
3) r
4) $p \vee (t \wedge s)$
$\therefore t \wedge s$

$\left\{\begin{array}{l} p \to \sim r \quad \text{(de 1) y 2))} \quad \text{Silog. hipótet.} \\ r \\ p \vee (t \wedge s) \end{array}\right.$

$\therefore t \wedge s$

$\sim p$ (M. Tollens)
$p \vee (t \wedge s)$

$\therefore t \wedge s$

$t \wedge s$ (Silog. disyuntivo)

$\therefore t \wedge s$

b) 1) $p \to (q \to s) \equiv p \to (\sim q \vee s) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee s)$ (1)
2) $\sim r \vee p \equiv p \vee \sim r \equiv p \vee \sim r$ (2)
3) q

$\therefore r \to s$

por ley de resolución
$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \vee r \end{array}}{\therefore q \vee r}$$
$\Rightarrow (\sim q \vee s) \vee \sim r$ de (1) y (2)

$\left.\begin{array}{l} \sim q \vee s \vee \sim r \equiv \sim q \vee (s \vee \sim r) \\ q \equiv q \end{array}\right\}$ por Silogismo disyuntivo
$$\left(\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{\therefore q}\right)$$

$\equiv s \vee \sim r \equiv \boxed{r \to s}$ //

por equiv. lógica
$p \to q \equiv \sim p \vee q$

c) $(p \wedge q) \to r$
$r \to -t$
t

$\sim p \vee \sim q$

S. Hipotetico

$\} (p \wedge q) \vee \sim t \equiv \sim t \vee (p \wedge q)$

q — Modus Ponens

S. Disy

$\} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

d) Si la ballena es un mamífero, entonces toma oxigeno del aire. Si toma su oxigeno del aire, entonces no necesita bronquios. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por lo tanto no necesita bronquios.

c) Si la ballena es un mamífero (p), entonces toma oxigeno del aire (q). Si toma su oxigeno del aire (q), entonces no necesita bronquios (r). La ballena es un mamífero (p) y vive en el océano (s). Por lo tanto no necesita bronquios (r).

$$\left.\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ p \wedge s \\ \hline \therefore r \end{array}\right\} \underset{\text{SH}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ p \wedge s \end{array}\right\} \underset{\text{Simp}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ p \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

3. Demostrar las siguientes proposiciones usando el método directo:

a) Si m es par, entonces m + 7 es impar.

b) La suma de dos impares es par.

c) El producto de dos racionales es racional.

a) Si m es par, entonces $m+7$ es impar.

Dem: Sea $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, luego $m+7 = 2k+7$ $= 2k+(6+1) = (2k+6)+1 = 2(k+3)+1$ es impar // $(k+3 = p \in \mathbb{Z})$

b) La suma de dos impares es par.

Dem: Sean $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ $\wedge$ $n = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$, dos números impares, entonces $m+n = 2k+1+2l+1 =$ $= 2k+2l+2 = 2(k+l+1)$ con $(k+l+1) \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $m+n$ es par //

c) El producto de dos racionales es racional.

Definición: El número r es racional si $\exists$ dos enteros p y q, $q \neq 0$ tal que $r = \frac{p}{q}$. Un número real que no es racional se llama irracional.

Dem: Supongo que r y s son números racionales, entonces $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ y $s = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Luego $r.s = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p.m}{q.n}$ es racional pues $p.m \in \mathbb{Z}$, $q.n \in \mathbb{Z}$ $\wedge$ $q.n \neq 0$. //

4. Demostrar las siguientes proposiciones usando el método indirecto:

a) Si 3n + 2 es impar, entonces n es impar.

b) La suma de dos números impares es par.

c) Si x es irracional, $\frac{1}{x}$ también lo es.

$\frac{1}{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{1 \cdot q}{p} = x \therefore x = \frac{q}{p}$, $q, p \in \mathbb{Z}$ es racional. //

(5) Demostrar las siguientes proposiciones usando una demostración por contradicción.

a) Si x es racional y $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ también lo es.

Dem: Supongo que $\frac{1}{x}$ es irracional, como x es racional, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tq $x = \frac{p}{q}$. Luego $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$, como $q, p \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{x}$ es racional

Absurdo. $\therefore$ $\frac{1}{x}$ es racional. //

b) Si $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Dem: Supongo que n es par, entonces $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, luego $3 \cdot n + 2 = 3 \cdot (2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k+1) = 2p$, con $3k+1 \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $3n+2$ es par.

Absurdo $\therefore$ n es impar. //

c) La suma de dos racionales es racional.

Sean p, q racionales $\Rightarrow p+q$ es racional.

Dem: Supongo que $p+q$ no es racional $\Rightarrow \nexists\, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $p+q = \frac{m}{n} \Rightarrow p$ y q no son racionales

Absurdo pues por hipótesis p y q son racionales

$\therefore$ la suma de dos racionales es racional. //

d) 4n+3 es impar, entonces n es par. (consultar)(mal planteado)

e) El producto de un número impar consigo mismo es impar.(implicación incorrecta)

5. Demostrar las siguientes proposiciones usando una demostración por contradicción o reducción al absurdo:

a) Si x es racional y $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ también lo es.

b) Si 3n +2 es impar, entonces n es impar

c) La suma de dos racionales es un número racional.

$\frac{1}{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{1 \cdot q}{p} = x \therefore x = \frac{q}{p}$, $q, p \in \mathbb{Z}$ es racional. //

(5) Demostrar las siguientes proposiciones usando una demostración por contradicción.

a) Si x es racional y $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ también lo es.

Dem: Supongo que $\frac{1}{x}$ es irracional, como x es racional, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tq $x = \frac{p}{q}$. Luego $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$, como $q, p \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{x}$ es racional

Absurdo. $\therefore$ $\frac{1}{x}$ es racional. //

b) Si $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Dem: Supongo que n es par, entonces $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, luego $3.n+2 = 3.(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1) = 2P$, con $3k+1 \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $3n+2$ es par.

Absurdo $\therefore$ n es impar. //

c) La suma de dos racionales es racional.

Sean p, q racionales $\Rightarrow p+q$ es racional.

Dem: Supongo que $p+q$ no es racional $\Rightarrow \nexists\, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $p+q = \frac{m}{n} \Rightarrow p$ y q no son racionales

Absurdo pues por hipótesis p y q son racionales

$\therefore$ la suma de dos racionales es racional //

d) n^2 es un número natural par, entonces n es par.

P : n^2 es par $P \to q$ $\sim q$: n es impar
q = n es par $P \to \sim q$

$n^2 = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$n = \frac{2}{2}\sqrt{2k} = 2\,\frac{\sqrt{2k}}{2}$

$n = 2t \quad t \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ n es es par contradición.

e)Sean x, y números reales. Si $x^2+y^2=0$, entonces x=0 e y=0.

e) p : $x^2+y^2=0 \to q$: $x=0 \wedge y=0$ X
$\sim q$ $\quad x \neq 0 \vee y \neq 0$
$x^2+y^2 \neq 0$
absurdo porque $x^2+y^2=0$

6. Demostrar

“El entero $\boldsymbol{m}$ es impar si, y solo si, $\boldsymbol{m^2}$ es impar”

“Dados dos números reales x,y se cumple que $x^2+y^2=0$ si, y sólo si, x=0 e y=0”

“Dados dos enteros n, m se cumple que n·m es par si, y sólo si, n es par ó m es par.”

(6) Demostrar "$\underbrace{\text{El entero } m \text{ es impar}}_{p}$, $\underbrace{\text{si y sólo si}}_{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{m^2 \text{ es impar}}_{q}$."

$\boxed{p \Rightarrow q}$ El entero m es impar $\Rightarrow$ m^2 es impar

. Directo: Como m es impar $m = 2k+1$ $k \in \mathbb{Z}$

$m^2 = (2k+1)^2$

$m^2 = \underbrace{4k^2+4k}+1$ → Factor común.

$m^2 = 2.(2k^2+2k) + 1$

$m^2 = 2.p+1$ $p \in \mathbb{Z}$

m^2 es impar //

$\boxed{q \Rightarrow p}$ si m^2 es impar $\Rightarrow$ m es impar

. Indirecto: Hago la contrarecíproca si m es par $\Rightarrow$ m^2 es par

Como m par, $m = 2k$ $k \in \mathbb{Z}$

$m^2 = 4k^2$

$m^2 = 2.(2k^2)$ sea $2k^2 = l \in \mathbb{Z}$

$m^2 = 2.l$ es par //

7. Mostrar que estas sentencias son equivalentes:

p_1 : n es un entero par

p_2 : $n-1$ es un entero impar

p_3 : n^2 es un entero par

Mostrar que son equivalentes.

$\Rightarrow p_2$: n es un entero par $\Rightarrow$ $n-1$ es un entero impar

$$n = 2k \quad k \in \mathbb{Z}.$$
$$n-1 = 2k-1$$
$$n-1 = 2(k-1)+1$$
$$n-1 = 2p+1,\ p=(k-1) \in \mathbb{Z} \text{ es impar } //$$

$\Rightarrow p_3$: $n-1$ es un entero impar $\Rightarrow$ n^2 es entero par.

$$n-1 = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$n = 2k+\cancel{1-1}$$
$$n = 2k$$
$$n^2 = 4k^2$$
$$n^2 = 2(2k^2) \quad 2k^2 = m \in \mathbb{Z}$$
$$n^2 = 2m \text{, es par. } //$$

$\Rightarrow p_1$: n^2 es par $\Rightarrow$ n es par.

Indirecto: n es impar $\Rightarrow$ n^2 es impar

$$n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$n^2 = (2k+1)^2$$
$$n^2 = 4k^2+4k+1$$
$$n^2 = 2.p+1 \quad p = (2k^2+2k) \in \mathbb{Z}$$
$$n^2 \text{ es impar } //$$

8. Demostrar, por tres métodos distintos, que si n es un entero y n + 2 es par, entonces n es par.

8) Demostrar, por tres métodos distintos, que si n es un entero y $n+2$ es par, entonces n es par.

DIRECTO

$$n+2 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$n = 2k-2$$
$$n = 2(k-1) \text{, sea } (k-1) = p \in \mathbb{Z}$$
$$n = 2p \text{ es par } //$$

INDIRECTO:

$$n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}.$$
$$n+2 = (2k+1)+2 \quad \text{sumo 2 miembro a miembro}$$
$$n+2 = 2(k+1)+1 \quad \text{factor común.}$$
$$n+2 = 2(k+1)+1 \quad \text{sea } k+1 = p \in \mathbb{Z}$$
$$n+2 = 2p+1 \text{ es impar } //$$

ABSURDO

Supongo que n es impar

$$n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$n+2 = 2k+1+2 \quad \text{sumo 2 miembro a miembro}$$
$$n+2 = 2(k+1)+1 \quad \text{sea } k+1 = p \in \mathbb{Z}$$
$$n+2 = 2p+1$$

es impar, ABSURDO pues la hipótesis dice que $n+2$ es par $\therefore$ n es par //