

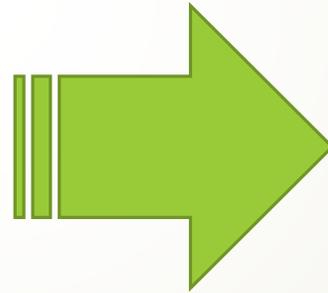


TÉCNICAS Y ESTRUCTURAS DIGITALES

Práctica de Minimización

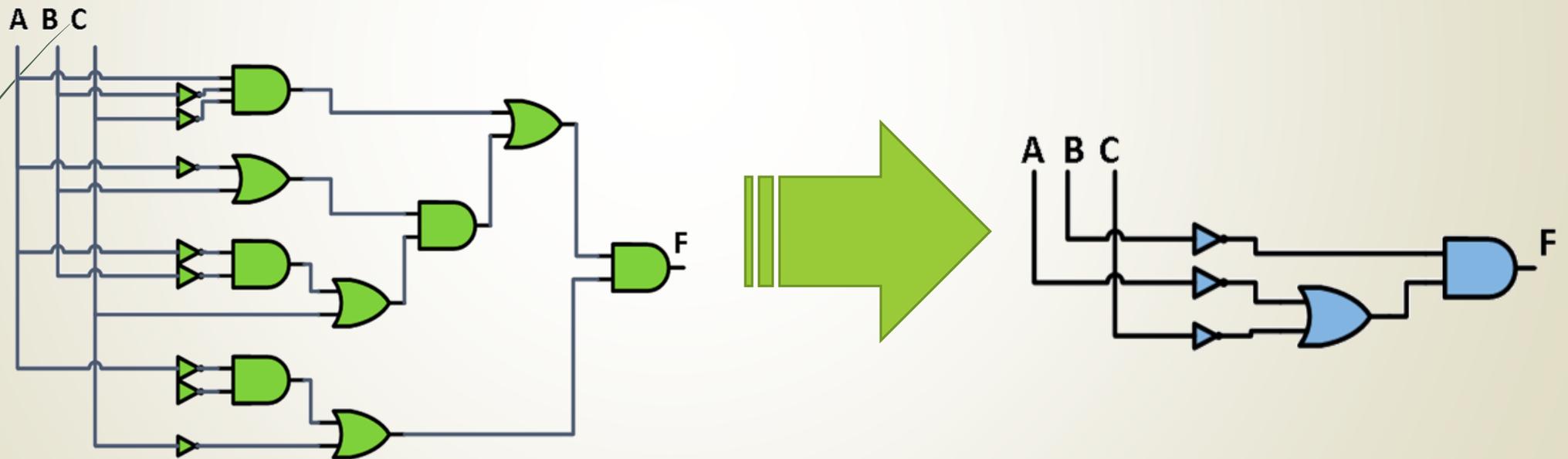
Minimización

- Reducir la estructura de un objeto sin alterar sus propiedades.



Minimización de Funciones

- Consiste en reducir la estructura de una función lógica un formato equivalente y más simple que el original.



Métodos de Minimización

- Método Algebraico
- Método Gráfico de Karnaugh o Mapa de Karnaugh
- Método Tabular Quine-McCluskey

Método Algebraico

$$a \oplus b \cdot c + c$$

$$a \oplus b \cdot c + c$$

$$(a \cdot \bar{b} \cdot c + c)$$

$$(a(b \cdot c + c))$$

$$(a \cdot b \cdot c + a)$$

$$(a \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b})$$

$$a \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$a \cdot b \cdot c + 0 +$$

Método de karnaugh

		ab		
		0	1	
c	00	0		00
	01	0		01
1	11	0		11
	10		0	10

Método de Quine-McCluskey

DEC	BINARIO	INDICE	N/C
0-1,2-3,4-5,6-7	0 _ _ _	0	
0-1,4-5,2-8,6-7	0 / _ _ _		
0-1,4-5,8-9,12-13	_ _ 0 _		
0-1,8-9,4-5,12-13	/ _ _ 0		
0-2,4-6,1-3,5-7	0 _ / _ _		
0-4,8-12,1-5,9-13	/ _ 0 _		



Métodos de Minimización

► ¿En qué se basan los métodos de minimización?

$$a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + a.b.c$$

$$a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + a.b.c$$

$$a.\bar{b}.(c + \bar{c}) + a.b.(\bar{c} + c)$$

$$a.\bar{b}.1 + a.b.1$$

$$a.\bar{b} + a.b$$

$$a.(\bar{b} + b)$$

$$a.1$$

$$a$$



Métodos de Minimización

➤ Método Algebraico

- Se aplica a cualquier función
- Consiste en aplicar las leyes del Álgebra Binaria para:
 - Desarrollar los operadores compuestos
 - Resolver las negaciones múltiples
 - Efectuar las distribuciones
 - Eliminar término o variables redundantes
 - Asociar términos adyacentes para eliminar variables



Método Algebraico

- Dada la siguiente función lógica minimícela aplicando el método algebraico.

$$F(a, b, c) = \overline{a \cdot b \cdot c} + (a \oplus b) \cdot \overline{b \oplus c}$$

$$= \overline{a \cdot b \cdot c} \cdot (a \oplus b) \cdot \overline{b \oplus c} \quad \text{De Morgan}$$

$$= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\overline{a \oplus b} + \overline{b \oplus c}) \quad \text{De Morgan e Involución}$$

$$= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot ((a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}) + (b \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c)) \quad \text{Desarrollo de XNOR y XOR}$$

$$= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c) \quad \text{Eliminar paréntesis}$$

$$= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot a \cdot b + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot b \cdot \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot \bar{b} \cdot c \quad \text{Distributiva}$$

$$= \cancel{\bar{a} \cdot a \cdot b} + \cancel{\bar{b} \cdot a \cdot b} + \bar{c} \cdot a \cdot b + \cancel{\bar{a} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}} + \cancel{\bar{b} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}} + \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \cancel{\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}} + \cancel{\bar{b} \cdot b \cdot \bar{c}} + \bar{c} \cdot b \cdot \bar{c} + \cancel{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c} + \cancel{\bar{b} \cdot \bar{b} \cdot c} + \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot c \quad \text{Distributiva, Complemento, Invarianza, Idempotencia, Tautología}$$

Método Algebraico

- Dada la siguiente función lógica minimícela aplicando el método algebraico.

$$F(a, b, c) = \overline{a \cdot b \cdot c + (a \oplus b) \cdot \overline{b \oplus c}} = \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c$$

a	b	c	$a \cdot b \cdot c$	$a \oplus b$	$\overline{b \oplus c}$	$(a \oplus b) \cdot \overline{b \oplus c}$	F
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Método de Karnaugh

➤ Método Gráfico de Karnaugh o Mapa de Karnaugh

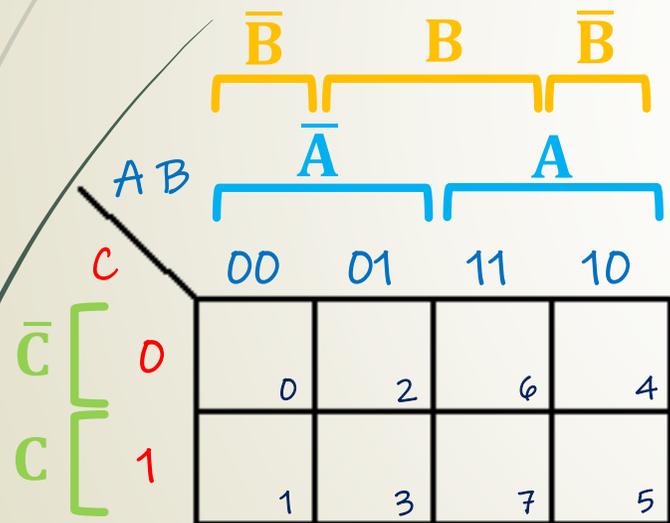
- Se aplica a funciones canónicas o pseudocanónicas
- Consiste en:
 - Crear un mapa o tabla organizado en base al código Gray, cuyo tamaño dependerá de la cantidad de variables de la función
 - Ubicar los términos de la función en el mapa de modo que los adyacentes queden juntos.
 - Agrupar términos que difieren en una variable considerando **grupos de tamaño potencia entera de 2**, que se formarán de mayor a menor
 - Eliminar las variables que en un mismo grupo aparecen directas y negadas.



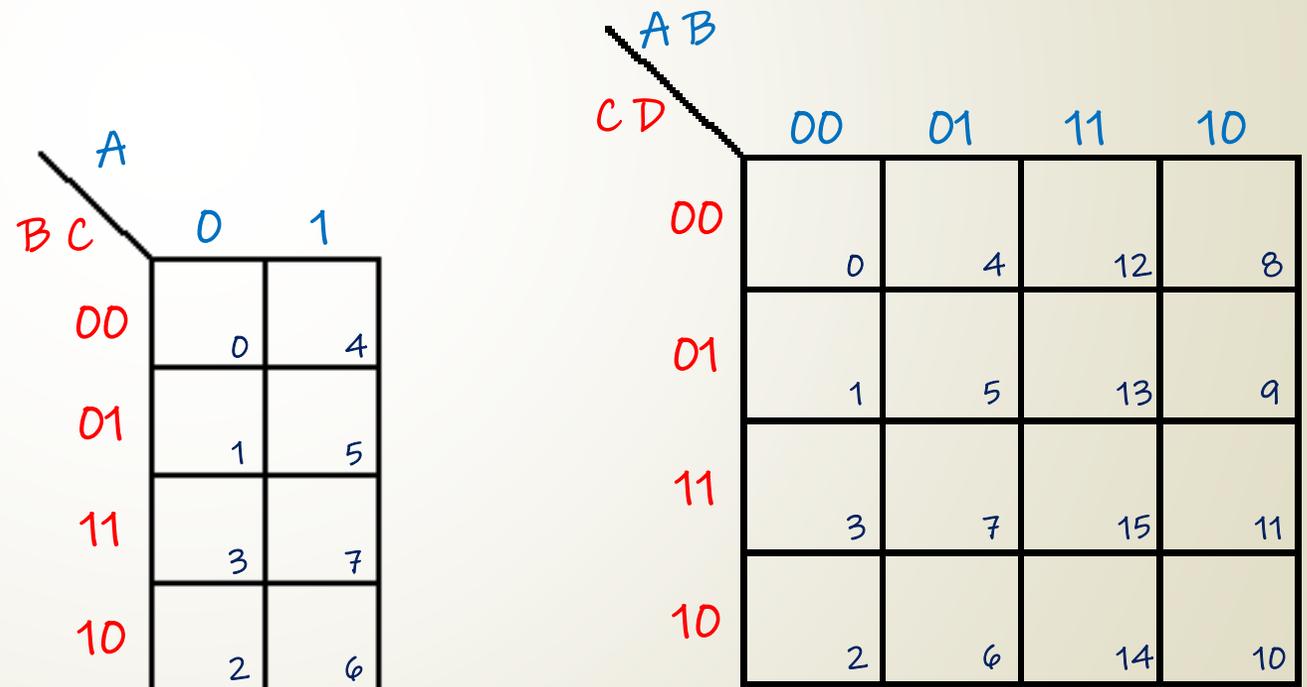
Método de Karnaugh

➤ Método Gráfico de Karnaugh o Mapa de Karnaugh

Mapa de 3 variables



Mapa de 4 variables



Método de Karnaugh

➤ Método Gráfico de Karnaugh o Mapa de Karnaugh

Mapa de 5 variables

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	8	24	16
01	2	10	26	18
11	6	14	30	22
10	4	12	28	20

$E=0$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	9	25	17
01	3	11	27	19
11	7	15	31	23
10	5	13	29	21

$E=1$

Mapa de 6 variables

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$E=0, F=0$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$E=0, F=1$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$E=1, F=0$

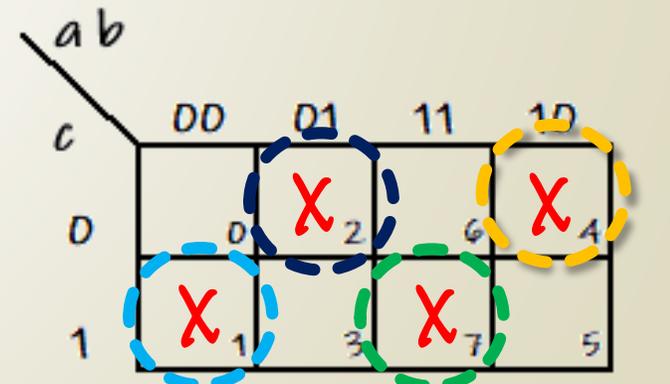
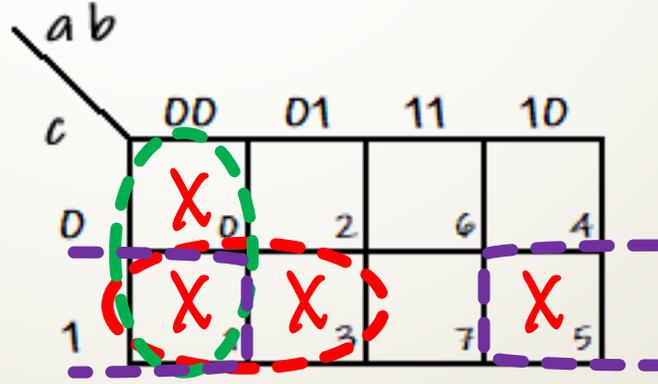
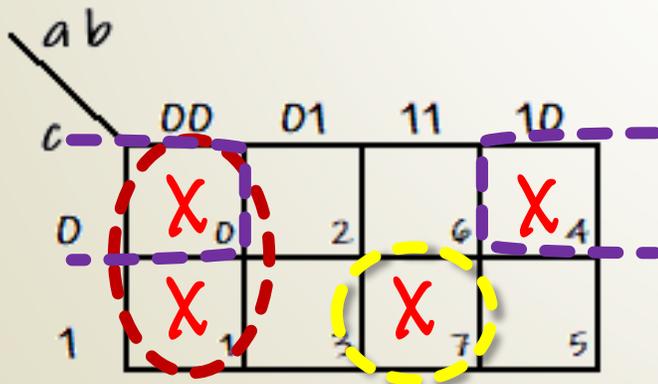
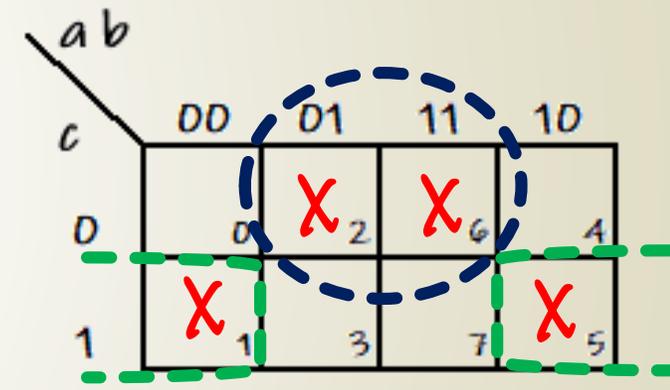
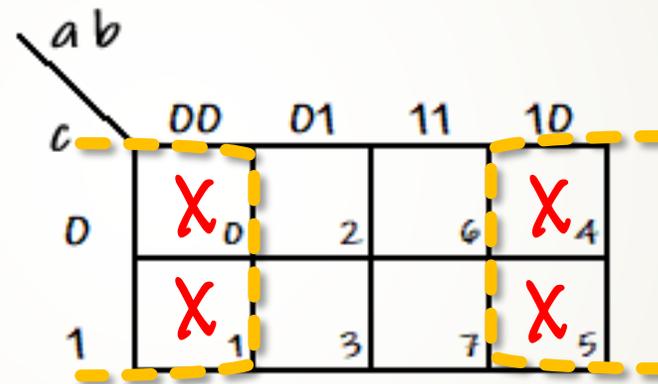
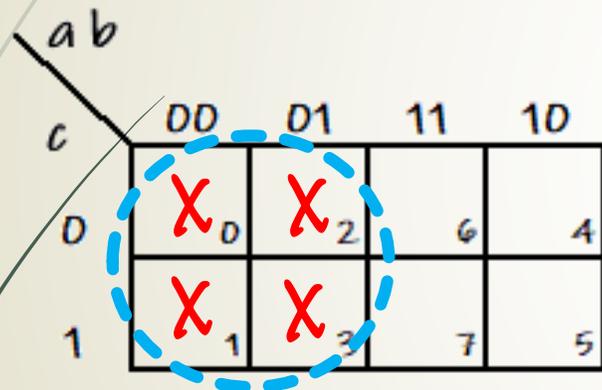
ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$E=1, F=1$

Método de Karnaugh

► ¿Cómo se forman los grupos o lazos?

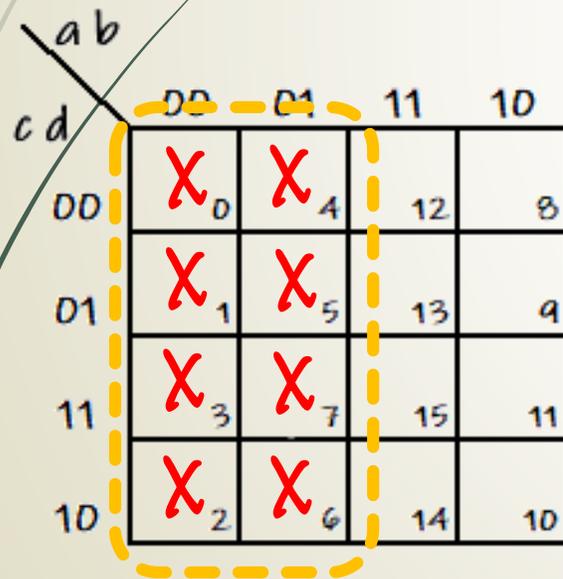
Mapa de 3 variables



Método de Karnaugh

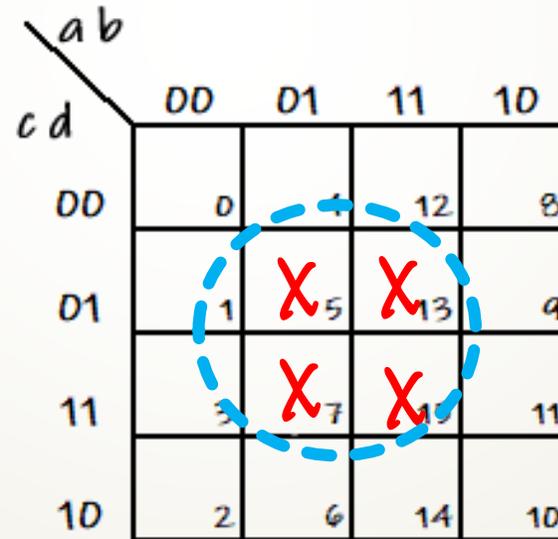
► ¿Cómo se forman los grupos o lazos?

Mapa de 4 variables



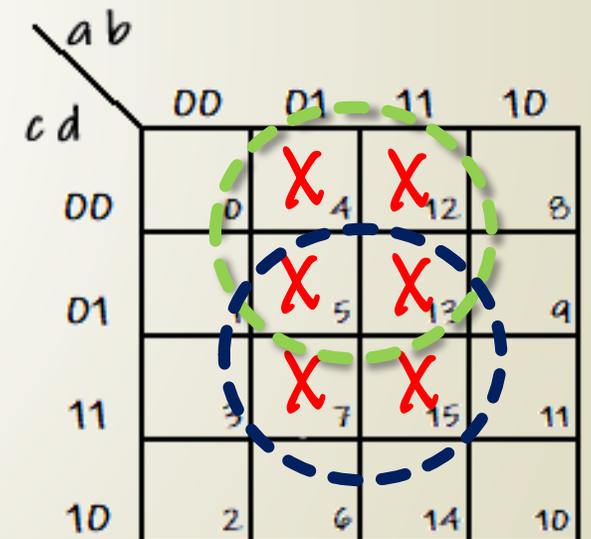
A 4-variable Karnaugh map with variables *a*, *b*, *c*, and *d*. The map is a 4x4 grid with columns labeled *ab* (00, 01, 11, 10) and rows labeled *cd* (00, 01, 11, 10). The cells contain the following values: (00,00)=0, (01,00)=4, (11,00)=12, (10,00)=8, (00,01)=1, (01,01)=5, (11,01)=13, (10,01)=9, (00,11)=3, (01,11)=7, (11,11)=15, (10,11)=11, (00,10)=2, (01,10)=6, (11,10)=14, (10,10)=10. All cells from (00,00) to (01,10) contain a red 'X'. A yellow dashed line encloses the entire 2x4 area of cells where *ab* is 00 or 01.

<i>cd</i> \ <i>ab</i>	00	01	11	10
00	X ₀	X ₄	12	8
01	X ₁	X ₅	13	9
11	X ₃	X ₇	15	11
10	X ₂	X ₆	14	10



A 4-variable Karnaugh map with variables *a*, *b*, *c*, and *d*. The map is a 4x4 grid with columns labeled *ab* (00, 01, 11, 10) and rows labeled *cd* (00, 01, 11, 10). The cells contain the following values: (00,00)=0, (01,00)=4, (11,00)=12, (10,00)=8, (00,01)=1, (01,01)=5, (11,01)=13, (10,01)=9, (00,11)=3, (01,11)=7, (11,11)=15, (10,11)=11, (00,10)=2, (01,10)=6, (11,10)=14, (10,10)=10. Cells (01,01)=5, (11,01)=13, (01,11)=7, and (11,11)=15 contain a red 'X'. A blue dashed line encloses the 2x2 area of cells where *cd* is 01 or 11 and *ab* is 01 or 11.

<i>cd</i> \ <i>ab</i>	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	X ₅	X ₁₃	9
11	3	X ₇	X ₁₅	11
10	2	6	14	10



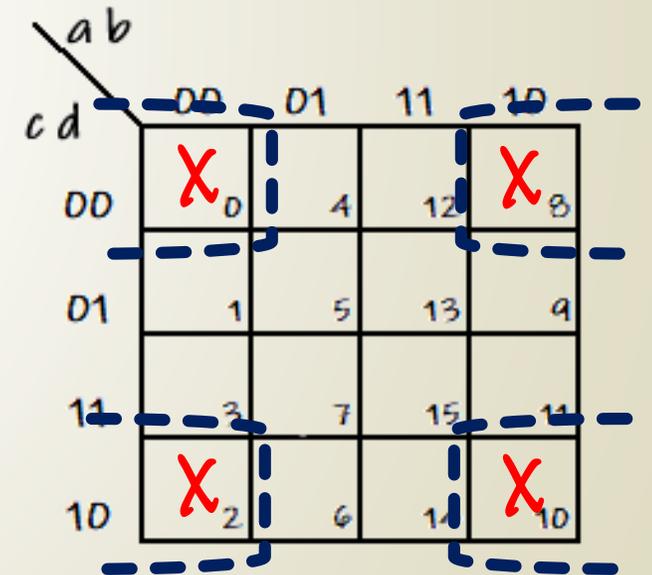
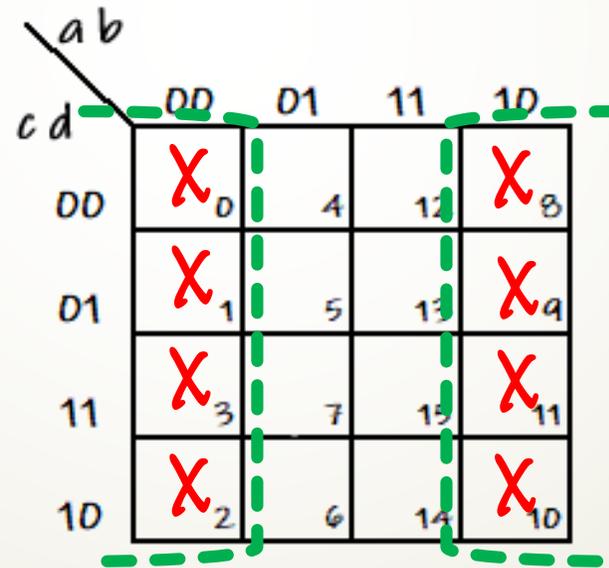
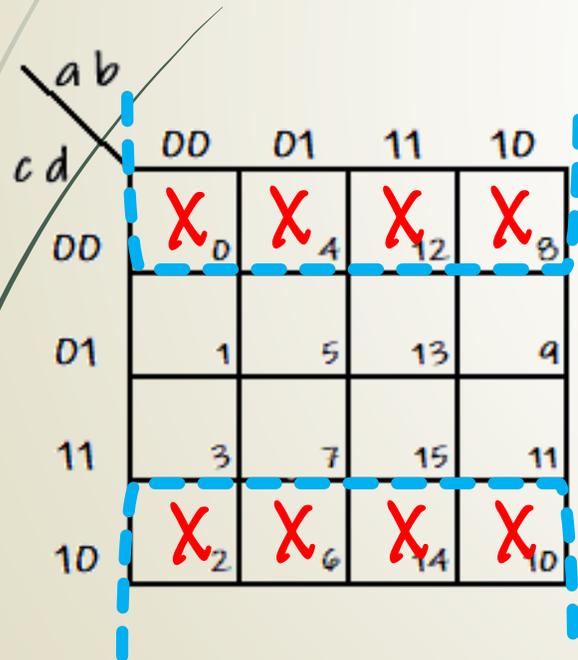
A 4-variable Karnaugh map with variables *a*, *b*, *c*, and *d*. The map is a 4x4 grid with columns labeled *ab* (00, 01, 11, 10) and rows labeled *cd* (00, 01, 11, 10). The cells contain the following values: (00,00)=0, (01,00)=4, (11,00)=12, (10,00)=8, (00,01)=1, (01,01)=5, (11,01)=13, (10,01)=9, (00,11)=3, (01,11)=7, (11,11)=15, (10,11)=11, (00,10)=2, (01,10)=6, (11,10)=14, (10,10)=10. Cells (01,01)=5, (11,01)=13, (01,11)=7, and (11,11)=15 contain a red 'X'. A green dashed line encloses the 2x2 area of cells where *cd* is 01 or 11 and *ab* is 01 or 11. A blue dashed line encloses the 2x2 area of cells where *cd* is 01 or 11 and *ab* is 00 or 01.

<i>cd</i> \ <i>ab</i>	00	01	11	10
00	0	X ₄	X ₁₂	8
01	1	X ₅	X ₁₃	9
11	3	X ₇	X ₁₅	11
10	2	6	14	10

Método de Karnaugh

- ¿Cómo se forman los grupos o lazos?

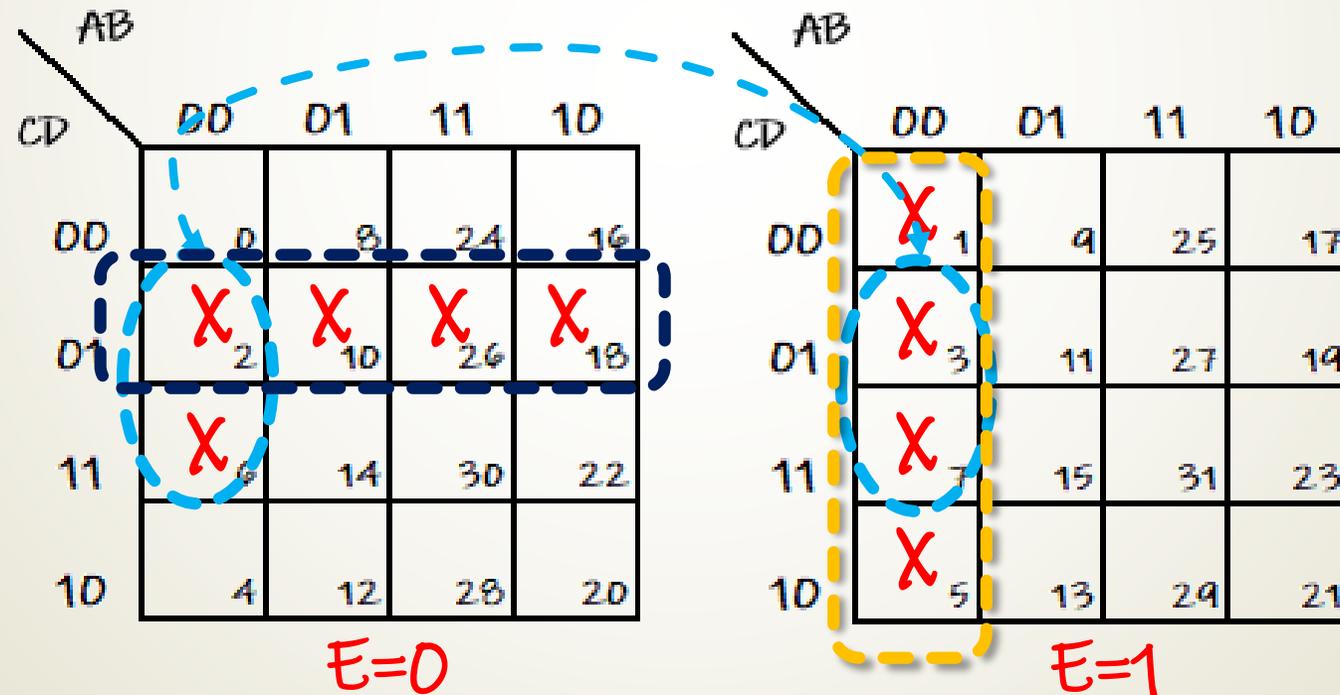
Mapa de 4 variables



Método de Karnaugh

► ¿Cómo se forman los grupos o lazos?

Mapa de 5 variables



Método de Karnaugh

- Dada la siguiente función lógica minimícela aplicando el método de Karnaugh.

$$\mathbf{F(a, b, c) = \overline{a \cdot b \cdot c} + \overline{(a \oplus b) \cdot b \oplus c}}$$

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\mathbf{F(a, b, c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}}$$

$$\sum_3 (0, 1, 2, 5, 6)$$

$$\mathbf{F(a, b, c) = (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}$$

$$\prod_3 (0, 3, 4)$$

Método de Karnaugh

- Dada la siguiente función lógica minimícela aplicando el método de Karnaugh.

$$F(a, b, c) = \overline{a \cdot b \cdot c} + \overline{(a \oplus b) \cdot b \oplus c}$$

$$F(a, b, c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

		ab		
		c		
D	00	01	11	10
	1	2	3	4
1	5	6	7	8
	9	10	11	12

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot X$$

$$X \cdot b \cdot \bar{c}$$

$$X \cdot \bar{b} \cdot c$$

$$F(a, b, c) = \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c$$

Función Mínima

Método de Karnaugh

- Dada la siguiente función lógica minimícela aplicando el método de Karnaugh.

$$F(a, b, c) = \overline{a \cdot b \cdot c} + \overline{(a \oplus b) \cdot b \oplus c}$$

$$\prod_3(0, 3, 4)$$

	<i>ab</i>			
<i>c</i>	00	01	11	10
0	0 ₀	2	6	4
1	1	3	7	5

Diagram description: A 2x4 Karnaugh map for variables a, b, and c. The top row is labeled 'c' and the columns are labeled 'ab' with values 00, 01, 11, 10. The left column is labeled 'c' and the rows are labeled '0' and '1'. The cells contain values: (0,00)=0, (0,01)=2, (0,11)=6, (0,10)=4, (1,00)=1, (1,01)=3, (1,11)=7, (1,10)=5. The cells (0,00), (0,10), and (1,01) contain a blue '0'. Dashed blue lines group the top row (0,00) and (0,10) together, and the bottom row (1,01) and (1,11) together. A dashed red circle highlights the cell (1,01).

$$X + \bar{b} + \bar{c}$$

$$\bar{a} + b + c$$

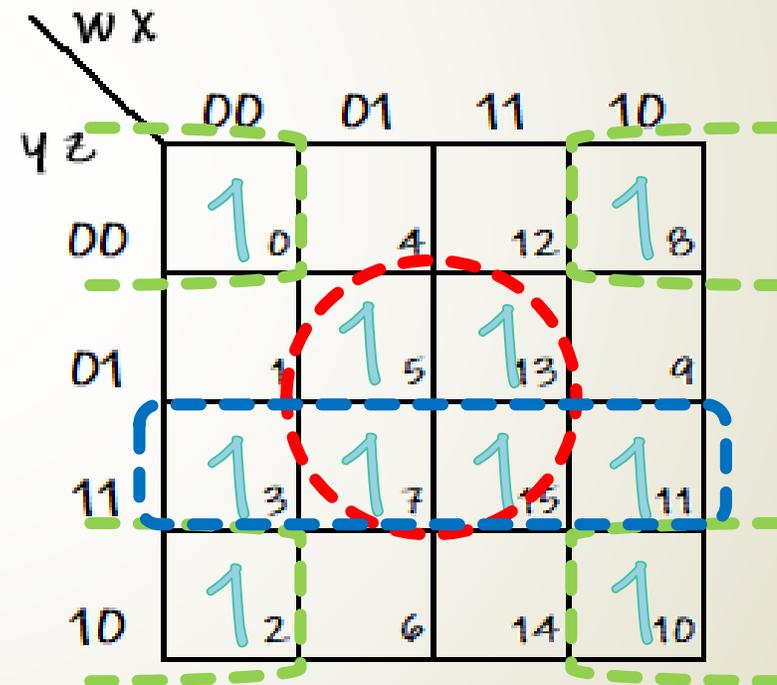
$$F(a, b, c) = (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$$

Función Mínima

Método de Karnaugh

- Dada la siguiente TV obtenga la función mínima correspondiente aplicando Karnaugh.

w	x	y	z	F	$\Sigma\Pi$
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	6
0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	1	11
1	1	0	0	0	12
1	1	0	1	1	13
1	1	1	0	0	14
1	1	1	1	1	15

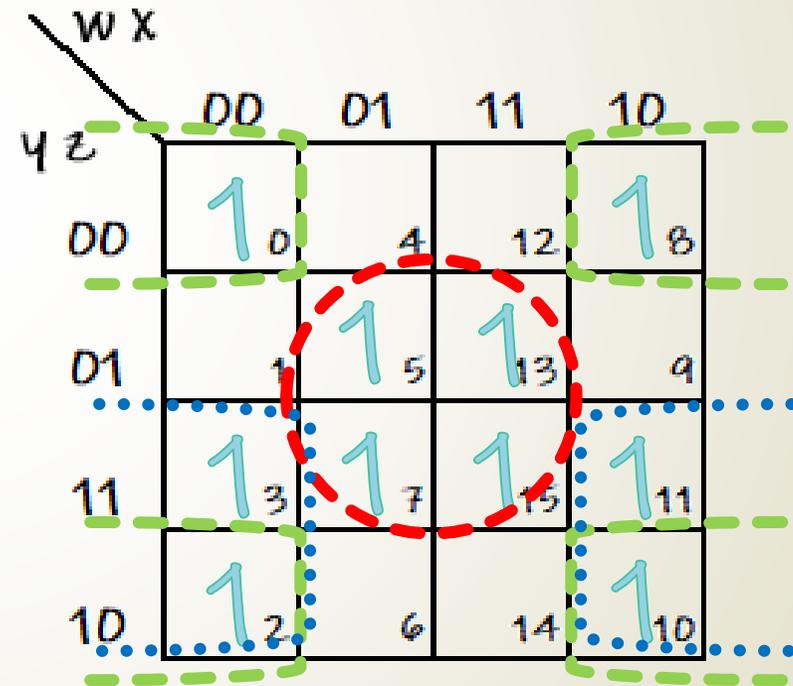


Función Mínima $x.z + y.z + \bar{x}.\bar{z}$

Método de Karnaugh

- Dada la siguiente TV obtenga la función mínima correspondiente aplicando Karnaugh.

w	x	y	z	F	$\Sigma\Pi$
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	6
0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	1	11
1	1	0	0	0	12
1	1	0	1	1	13
1	1	1	0	0	14
1	1	1	1	1	15

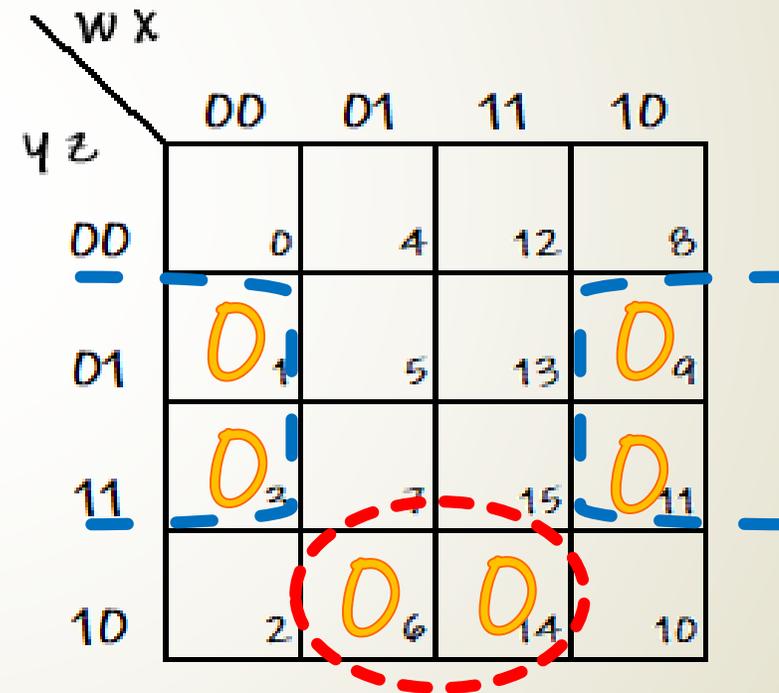


Función Mínima $x.z + \bar{x}.y + \bar{x}.\bar{z}$

Método de Karnaugh

- Dada la siguiente TV obtenga la función mínima correspondiente aplicando Karnaugh.

w	x	y	z	F	ΠΣ
0	0	0	0	1	15
0	0	0	1	0	14
0	0	1	0	1	13
0	0	1	1	1	12
0	1	0	0	0	11
0	1	0	1	1	10
0	1	1	0	0	9
0	1	1	1	1	8
1	0	0	0	1	7
1	0	0	1	0	6
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	1	4
1	1	0	0	0	3
1	1	0	1	1	2
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0



Función Mínima $(x + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + z)$

Métodos de Quine-McCluskey

➤ Método Tabular Quine-McCluskey

- Se aplica a funciones canónicas
- Consiste en:
 - Organizar los términos de la función según la cantidad de 1's de la combinación binaria correspondiente
 - Agrupar los términos adyacentes formando, sucesivamente, grupos de 2, 4, 8, ..., 2^n términos
 - Eliminar las variables que aparecen directas y negadas en un mismo grupo.



Métodos de Quine-McCluskey

- Dada la función lógica $\Sigma_4(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$ obtenga la función mínima aplicando el método de Quine-McCluskey
 - Paso 1: se escriben los equivalentes binarios e índice de cada término.

DEC	BINARIO				INDICE
0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	2
6	0	1	1	0	2
7	0	1	1	1	3
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	2
10	1	0	1	0	2
12	1	1	0	0	2
13	1	1	0	1	3

Cantidad de
1's de cada
combinación
binaria

Métodos de Quine-McCluskey

- Dada la función lógica $\Sigma_4(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$ obtenga la función mínima aplicando el método de Quine-McCluskey
 - Paso 2: se agrupan los términos por índice.

DEC	BINARIO				INDICE	NC
0	0	0	0	0	0	
2	0	0	1	0	1	
8	1	0	0	0		
3	0	0	1	1	2	
6	0	1	1	0		
9	1	0	0	1		
10	1	0	1	0		
12	1	1	0	0		
7	0	1	1	1	3	
13	1	1	0	1		

Para marcar los términos o grupos que no puedan combinarse

$$\begin{array}{c}
 \overset{0}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} + \overset{2}{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}} \\
 \bar{a}\bar{b}\bar{d}(\bar{c} + c) \\
 \bar{a}\bar{b}\bar{d} \cdot 1 \\
 \bar{a}\bar{b}\bar{d}
 \end{array}$$

Métodos de Quine-McCluskey

- Dada la función lógica $\Sigma_4(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$ obtenga la función mínima aplicando el método de Quine-McCluskey
 - Paso 3: se combinan términos (adyacentes) y se agrupan por índice.

DEC	BINARIO				INDICE	NC
0-2	0	0	-	0	0	
0-8	-	0	0	0		
2-3	0	0	1	-		
2-6	0	-	1	0	1	
2-10	-	0	1	0		
8-9	1	0	0	-		
8-10	1	0	-	0		
8-12	1	-	0	0		
3-7	0	-	1	1	2	
6-7	0	1	1	-		
9-13	1	-	0	1		
12-13	1	1	0	1	3	



0-2 $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$ 00_0

0-2 8-10

00_0 10_0

_0_0

Métodos de Quine-McCluskey

- Dada la función lógica $\Sigma_4(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$ obtenga la función mínima aplicando el método de Quine-McCluskey
 - Paso 4: cuando ya no es posible combinar, se eliminan los grupos redundantes

DEC	BINARIO				INDICE	NC
0-2, 8-10	-	0	-	0	0	
0-8, 2-10	-	0	-	0		
2-3, 6-7	0	-	1	-	1	
2-6, 3-7	0	-	1	-		
8-9, 12-13	1	-	0	-	1	
8-12, 9-13	1	-	0	-		

Métodos de Quine-McCluskey

- Dada la función lógica $\Sigma_4(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$ obtenga la función mínima aplicando el método de Quine-McCluskey
 - Paso 5: obtención de la función mínima

	Canónicos									
Implicantes	0	2	3	6	7	8	9	10	12	13
0-2, 8-10	X	X				X		X		
2-3, 6-7		X	X	X	X					
8-9, 12-13						X	X		X	X
Esenciales	*		*	*	*		*	*	*	*

$$0-2, 8-10 \quad _ \quad 0 \quad _ \quad 0$$

$$\bar{b} \cdot \bar{d}$$

$$2-3, 6-7 \quad 0 \quad _ \quad 1 \quad _$$

$$\bar{a} \cdot c$$

$$8-9, 12-13 \quad 1 \quad _ \quad 0 \quad _$$

$$a \cdot \bar{c}$$

Función Mínima $F(a, b, c, d) = \bar{b} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot c + a \cdot \bar{c}$