Obtención de las formas canónicas ΣΠ y ΠΣ por métodos algebraicos.

Considerando la siguiente función lógica:

$$F(A,B,C) = \overline{AB + \overline{A \oplus C}}$$

a) Obtener el formato canónico algebraico Suma de Productos (ΣΠ), utilizando el método algebraico,

b) Obtener el formato canónico algebraico Producto de Sumas (ΠΣ), utilizando el método algebraico,

Solución

El método algebraico, que consiste en la aplicación de las propiedades del álgebra de Boole, permite modificar la función lógica F manteniendo su equivalencia. El procedimiento inicial para obtener cualquiera de los formatos canónicos, consiste en deshacer todas las negaciones múltiples, reemplazar todos los operadores secundarios y ejecutar todas las operaciones distributivas que estén pendientes, específicamente aquellas que tiendan a configurar el formato buscado. Una vez que se obtiene un formato pseudocanónico, se procede a completar las variables faltantes en cada término (sin alterar la equivalencia) y se efectúan todas las distribuciones resultantes.

Se realizan las transformaciones necesarias a la función F, aplicando convenientemente las leyes del álgebra binaria, para obtener los formatos canónicos ΠΣ y ΣΠ, como se observa en la tabla siguiente.

a) SUMA DE PRODUCTOS	b) PRODUCTO DE SUMAS
Función Original	Función Original
$F(A,B,C) = \overline{AB + \overline{A \oplus C}}$	$F(A,B,C) = \overline{AB + \overline{A \oplus C}}$
Por ley de De Morgan	Por ley de De Morgan
$= \overline{AB} \cdot \overline{\overline{A \oplus C}}$	$= \overline{AB} \cdot \overline{\overline{A \oplus C}}$
Por involución y desarrollo de XOR	Por involución y desarrollo de la operación XOR
$= \overline{AB} \cdot (A\overline{C} + \overline{A}C)$	$= \overline{AB} \cdot (A\overline{C} + \overline{A}C)$
Por ley de De Morgan	Por ley de De Morgan
$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot (A\overline{C} + \overline{A}C)$	$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot (A\overline{C} + \overline{A}C)$
Por ley distributiva	Por ley distributiva
$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot A\overline{C} + \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot \overline{A}C$	$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot \left(A + \overline{A}C\right) \cdot \left(\overline{C} + \overline{A}C\right)$
Por ley distributiva	Por ley distributiva
$= \overline{A}A\overline{C} + \overline{B}A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{A}C + \overline{B}\,\overline{A}C$	$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot \left(A + \overline{A}\right) \cdot (A + C) \cdot \left(\overline{C} + \overline{A}\right) \cdot \left(\overline{C} + C\right)$

Reordenando variables y aplicando invarianza e idempotencia

$$= 0 + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

Se completa variables faltantes valiéndose de la ley de tautología

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\cdot 1\cdot C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\cdot\left(B + \overline{B}\right)\cdot C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

Por ley distributiva e idempotencia, se eliminan términos repetidos.

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \cancel{\overline{A}\,\overline{B}C}$$

Función canónica algebraica ΣΠ

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$$

Por ley de complemento y reordenando variables

$$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right)\cdot\left(A + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{C}\right)$$

Se completa variables valiéndose de la ley de tautología

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} + 0\right)\cdot\left(A + 0 + C\right)\cdot\left(\overline{A} + 0 + \overline{C}\right)$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} + C\overline{C}\right)\cdot\left(A + B\overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + B\overline{B} + \overline{C}\right)$$

Por ley distributiva e idempotencia

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)\cdot\left(A + B + C\right)$$
$$\cdot\left(A + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)\cdot\cancel{\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)}$$

Función canónica algebraica

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)\cdot\left(A + B + C\right)\cdot$$
$$\left(A + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)$$