

# ARBOLES Y EJES

## Definiciones

**Arboles:** Sirven para transmitir potencia y trabajan principalmente a la torsión o a la flexo-torsión.

**Ejes:** Elementos giratorios o fijos que sirven para sostener órganos de máquinas y trabajan principalmente a la flexión.

Las partes de los árboles y ejes que giran dentro de los cojinetes de apoyo reciben el nombre de gorriones.

### 1 - Arboles - Introducción

Los elementos destinados a transmitir potencia o guiar el movimiento de rotación a una pieza o de un conjunto de piezas, como una rueda o un engranaje son conocidos como árboles y ejes respectivamente. Dichos elementos son de suma utilidad en el campo de la mecánica y juegan un papel obligatorio en toda máquina y mecanismo que nos rodea. Para la transmisión de energía y el movimiento de las máquinas motrices a otros elementos se hace uso de un medio de transmisión bastante eficaz y económico que se categoriza como elemento de transmisión directo llamado árbol. Éste a su vez debe mantener su integridad estructural durante la realización de su cometido, es por ello que se han adaptado a las diferentes exigencias a las que son sometidos dándoles variadas formas y diseños que los ayudan a alcanzar altos estándares de funcionalidad y vida útil. La transmisión de potencia mediante árboles nos lleva también a otro aspecto necesario de estudiar y conocer como lo son los acoples que deben poseer dichos elementos para sujetar dos de ellos y así formar una unión eficiente que sirva de puente para que la energía siga su camino hacia donde es requerida. Muchos han sido los acoplamientos que han salido al mercado que van desde los rígidos, pasando por los elásticos y finalizando con los móviles. Cada uno de ellos dispone de sus propias características que los hacen útiles para ciertas condiciones. Como se dijo además de árboles existen los ejes que a su vez son los elementos de máquinas encargados de soportar y guiar a otros órganos, los cuales pueden girar u oscilar alrededor de éste y que no transmiten potencia. A éstos también se les da un uso igual de importante dentro de la mecánica aunque si bien no transmiten potencia son los encargados de mantener y soportar a los objetos que rotan por causa de una energía externa.

Los árboles son elementos de máquinas que giran siempre con los elementos que soportan (poleas, ruedas dentadas, etc.) a los que hacen girar o giran con ellos. **Estos elementos que soportan se fijan por medio de chavetas, ranuras estriadas o uniones forzadas.** Los árboles de transmisión descansan radialmente sobre cojinetes o rodamientos, y cuando están dispuestos verticalmente, su extremo inferior se

apoya sobre quicio ñeras. La parte del árbol que sobre cojinetes se denomina gorrón o muñón y cuando es vertical quicio.

Estos árboles, que al transmitir potencia cuando giran, se ven sometidos, a veces, a esfuerzos de torsión pura y casi siempre a esfuerzos combinados de torsión y flexión. El esfuerzo de torsión se produce al transmitir torque y la flexión debido a las fuerzas radiales que aparecen según sea la forma como se transmite la potencia a otro árbol (mediante acoplamientos, cadenas de transmisión, correas planas y trapeciales, por medio de engranajes, etc.).

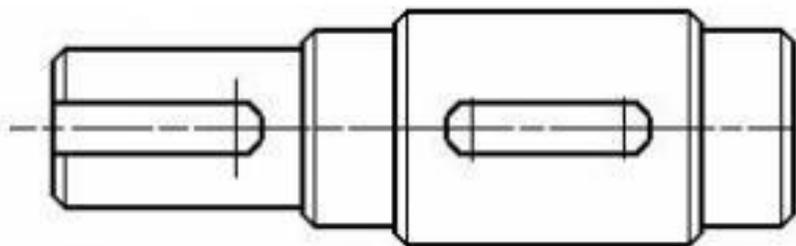
## **2. Tipos de árboles**

Debido a las diferentes necesidades de cada transmisión en diferentes aplicaciones, existen una variedad de árboles que se adecuan a dichas necesidades:

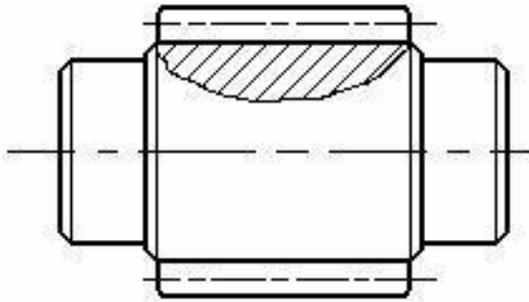
- **Lisos:** Exteriormente tienen una forma perfectamente cilíndrica, pudiendo variar la posición de apoyos, cojinetes, etc. Este tipo de árboles se utilizan cuando ocurren una torsión media.



- **Escalonados:** A lo largo de su longitud presenta varios diámetros en base a que soporta diferentes momentos torsores y al igual que el anterior, se utiliza para la situación en que ocurran unas tensiones de torsión media haciéndoles los más utilizados.



- **Ranurado o con talladuras especiales:** Presenta exteriormente ranuras siendo también de pequeña longitud dicho árbol. Se emplean estos árboles para transmitir momentos torsores elevados.



- **Huecos:** Se emplea por su menor inercia y por permitir el paso a su través de otro árbol macizo. El interés radica en que las tensiones debidas al momento torsor son decrecientes al acercarnos al centro del árbol.
- **Acodados:** Se emplean siempre que se quiera transformar en una maquina el movimiento alternativo en movimiento giratorio y viceversa. Se pueden presentar momentos torsores importantes en algunos tramos. Se diferencia del resto de los árboles debido a su forma ya que no sigue una línea recta sino de forma cigüeñal.



**Según su sección transversal** se conocen los arboles articulados, los flexibles, los telescópicos etc.

### **3. Materiales empleados en la construcción de árboles**

#### Materiales Para Ejes Y Árboles

El acero es el material que frecuentemente mas se usa en la fabricación de árboles. Variando adecuadamente la composición, el tratamiento térmico y el tratamiento mecánico pueden obtenerse propiedades mecánicas que se encuentren entre márgenes muy amplios.

Generalmente, los árboles están hechos de barras circulares de acero al carbono estirado en frío. Cuando se requiera tenacidad, resistencia al impacto y alta resistencia, se utilizan barras de acero aleado, tratado térmicamente. El acero con un cierto grado de carburación se empleara cuando el desgaste en la superficie del árbol sea importante. Sin embargo,

para no aumentar el costo, el diseñador deberá tratar de usar acero con bajo contenido en carbono, siempre que esto fuera posible.

Para confección de ejes y árboles, en la mayoría de los casos, en nuestro país se prefieren aceros según norma SAE. De tal manera que preferentemente se usan los siguientes aceros:

- **SAE 1010 Y SAE 1020:** Para árboles poco cargados o de uso esporádico donde sea deseable un bajo costo de fabricación o cuando algunas partes de los elementos deban ser endurecidas mediante cementación.
- **SAE 1045:** Es el acero para árboles más corrientemente usado, pues el mayor contenido de carbono le otorga una mayor dureza, mayor resistencia mecánica y un costo moderado. No obstante lo anterior, cuando este acero se endurece por templado sufre deformaciones y baja su resistencia a la fatiga.
- **SAE 4140:** Es un acero al cromo molibdeno bonificado de alta resistencia que se emplea en ejes muy cargados y en donde se requiere alta resistencia mecánica.
- **SAE 4340:** Es un acero al cromo níquel molibdeno bonificado de máxima tenacidad, resistencia a la tracción y torsión que se aplica a los cálculos para el diseño de árboles.
- **DIN St 50 o DIN St 60:** Son también aceros ordinarios con 500 N/mm<sup>2</sup> y 600 N/mm<sup>2</sup> respectivamente, que se emplean cuando los ejes o los árboles quedan sometidos a mayores solicitaciones.
- **DIN 15Cr3:** Acero de cementación de baja aleación que se usa especialmente para árboles de cajas de cambio de automotrices, con una resistencia a la ruptura en tracción entre 600 y 850 N/mm<sup>2</sup>.
- **DIN 15CrNi6:** Acero aleado de cementación con resistencia a la ruptura en tracción entre 900 y 1200 N/mm<sup>2</sup>, usado en la confección de árboles de cajas de cambio fuertemente solicitados.

**4. FABRICACION DE ARBOLES RECTOS :** Hasta 150 mm, se construyen a partir de redondos (acero comunes y aleados) torneado, escarpado mecánicamente, o estirado en frío, los de mayor diámetro y con escalones pronunciado se forjan. Los árboles ranurados se someten a un torneado o un rectificado final. . los puntos de apoyos y escalones, según las exigencias se , se tornean fino , se rectifican, e incluso, en caso de necesidad se endurecen los apoyos mediante tratamiento térmico previo al rectificado. El perfil redondo de acero se suministra como medida normal hasta 7m de largo.

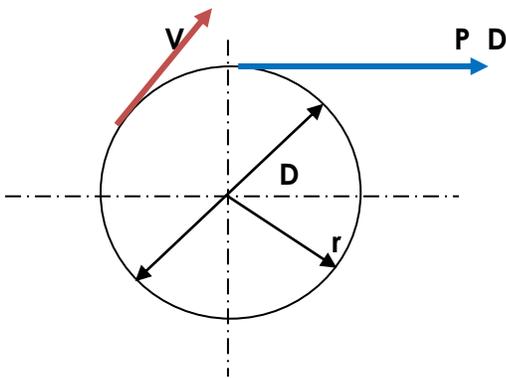
## 5. CONFORMACION.

Se rige por las piezas que van unidas al árbol o eje (cojinetes, empaquetaduras y poleas). Es importante la configuración de la zona de unión, el buen redondeado de los escalones y reducción de los efectos de entalladura.

- Debe tenerse en cuenta que los ejes en reposo pueden ser notablemente mas reducidos que los giratorios.
- Además que los arboles hechos de acero de alta resistencia no son mas rígidos que los fabricados con aceros comunes dado que **E** es prácticamente igual para todos los aceros.

- Para disminuir los efectos de fatiga y aumentar su resistencia a la flexión alternativa habrá que tratar por todos los medios eliminar o disminuir las entallas producidas por chaveteros, escalones, ranuras (degüello).
- Los arboles huecos con un diámetro interior de 0.5 del exterior tienen un peso del 75% del de los macizos pero su resistencia es del 94% de la de estos.
- Los arboles de giro relativamente rápido, en función de sus dimensiones, exigen un equilibrado estático y los muy rápidos un equilibrado dinámico de sus masas; soportes bien rígidos y fijos y configuración que le de rigidez.
- Con frecuencia la longitud de las máquinas depende mucho de la longitud de los gorriones, apoyos y empaquetadura de los cubos.
- El no desplazamiento longitudinal de los elementos montados sobre ellos, se asegura, mediante escalones en los lugares de apoyo, mediante anillos de ajuste y también mediante arandelas de seguridad.

## 6. MOVIMIENTO ROTATORIO - RELACIONES FUNDAMENTALES



Un árbol de transmisión está animado de un movimiento circular uniforme cuando está en funcionamiento por lo tanto se rige por sus leyes. Un punto cualquiera de su periferia se mueve sobre una circunferencia recorriendo arcos iguales en tiempos iguales.

Si recorre  $\alpha^\circ$  en un tiempo  $t$  la velocidad angular  $\omega$  es:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad \text{En radianes} \quad (6.1)$$

$$V = \omega r \quad \text{Velocidad tangencial} \quad (6.2)$$

Esta velocidad se expresa en las aplicaciones prácticas en función del diámetro y del número de vueltas o revoluciones por minuto  $n$ . Por lo tanto si expresamos  $V$  en m/seg. tenemos:

$$V = \frac{\pi d n}{60} \quad (6.3)$$

De ella surgen las siguientes expresiones:

$$V = \frac{\pi r n}{30} \quad \text{Velocidad tangencial} \quad (6.4)$$

$$n = \frac{60 v}{\pi d} = \frac{30 v}{\pi r} = 30 \frac{\omega}{\pi} \quad (6.5)$$

Por otro lado si actúa una fuerza  $P$  en el borde exterior del árbol se produce un momento de rotación cuyo valor resulta si  $D$  es dado en cm. :

$$M_r = P r = P \frac{D}{2} \text{ Kg cm} \quad (6.6)$$

El momento torsor generado en el árbol, si en otro lugar se lo trata de frenar será también:

$$M_t = P r \quad (7.6)$$

La potencia  $N$  en CV que exigirá el accionamiento de un árbol de transmisión sería:

$$N = \frac{P v}{75} \text{ (C V)} \quad (8.6)$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$N = \frac{P v}{75} = \left(\frac{P}{75}\right) \left(\frac{\pi d n}{60}\right) = \frac{6.28 P r n}{4500} \quad (9.6)$$

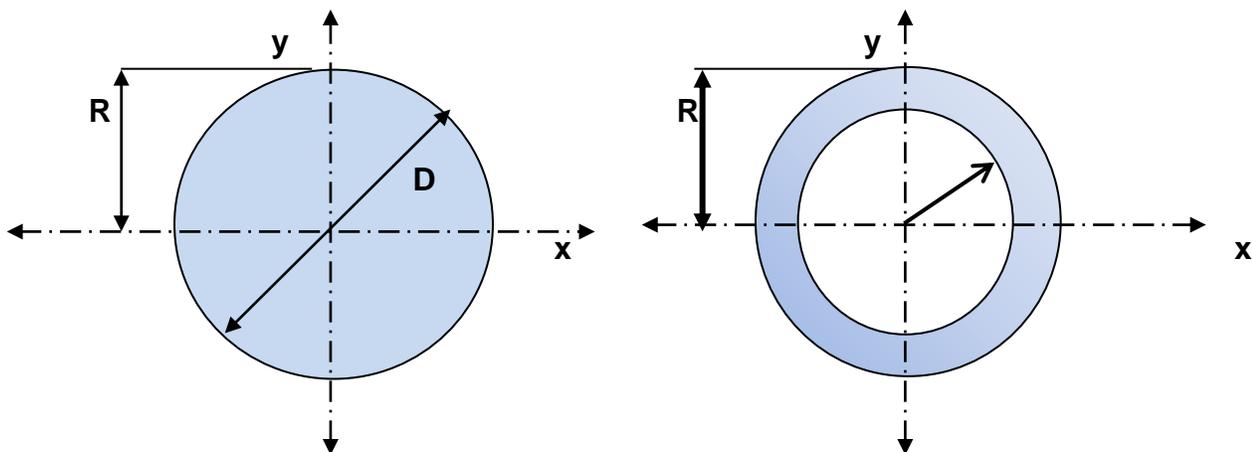
y si  $r$  viene dado en cm.:

$$N = \frac{6.28 P r n}{4500} \left(\frac{1}{100}\right) = \frac{P r n}{71620} \quad (10.6)$$

De la que podemos obtener una nueva expresión del momento de rotación o momento torsor:

$$M_t = P r = 71620 \frac{N}{n} \quad (11.6)$$

## 7. MOMENTO DE INERCIA DE LOS ARBOLES



## Árbol macizo

## Árbol hueco

Los árboles de transmisión tienen por lo general una sección circular hueca o maciza. Por lo tanto el momento de inercia tiene igual valor para los ejes x-y.

**7.1 Cálculo para arboles:** Los Arboles (y ejes) se calculan en cuanto a su resistencia (torsión y flexión), su deformación (flecha, oblicuidad entre los soportes y ángulos de torsión) y su oscilación o vibración (oscilación de torsión y flexión)

### Macizos

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} \cong 0.05 D^4 \quad (7.1)$$

El módulo de flexión W y la distancia c a la fibra más alejada del centro dan las siguientes expresiones:

$$W_x = \frac{J_x}{c} = \frac{\pi D^3}{32} \quad (7.2)$$

$$W_y = \frac{J_y}{c} = \frac{\pi D^3}{32} \quad (7.3)$$

Simplificando valores:

$$W_x = W_y \cong 0.1 D^3 \quad (7.4)$$

El momento de inercia polar es la suma de los momentos de inercia con respecto a los ejes x e y.

$$J_p = J_x + J_y = \frac{2\pi d^4}{64} \cong 0.1 d^4 \quad (7.5)$$

Del mismo modo:

$$W_p = W_x + W_y = 2 W = 0.2 d^3 \quad (7.5)$$

### **Huecos:**

Cuando la sección es anular con diámetro exterior **D** e interior **d**, el momento de inercia común vale:

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \quad (7.6)$$

Y de igual forma el módulo de resistencia:

$$W_x = W_y = \frac{\pi}{32 D} (D^4 - d^4) \quad (7.7)$$

## 8. ESFUERZOS QUE SUFREN LOS ARBOLES

Los árboles deben transmitir a las maquinas los movimientos y la energía que le entrega el motor en la polea motora.

Si el vínculo es una correa, el tramo tendido de la misma ejerce sobre la polea una fuerza tangencial **P**; el momento motor será **P.r** siendo **r** su radio.

Si sobre el árbol existen varias poleas conductoras **C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>**, **C<sub>3</sub>** y **C<sub>4</sub>** cada una de ellas produce un momento resistente de sentido contrario al motor. El árbol por la acción de estos momentos se encuentra sometido a un esfuerzo de torsión. El peso de las poleas y el peso propio del árbol producen también pequeños momentos flectores sobre todo cuando se trata de árboles de mando general.

Para disminuir las deformaciones (flechas) producidas por la flexión se procura disminuir el peso propio de las poleas (se las fabrica con rayos en lugar de macizas y materiales en lo posible livianos), acortar al máximo posible (compatible con el aumento de costo) la distancia entre apoyos o cojinetes; se trata de colocar las poleas lo mas próxima posible a los apoyos; los rodamientos deben ser oscilantes para evitar vibraciones debidas a las pequeñas flechas creadas por los esfuerzos de flexión.

**8.1 CALCULO DE DEFORMACION DE LOS ARBOLES:** La deformación de un árbol de maquina es generalmente tan importante como su resistencia y en muchos casos más importante. La mayoría de las veces un árbol que es suficientemente rígido es también suficientemente resistente, y el árbol debería ser calculado para la rigidez y verificado para la resistencia.

### 8.1.1 - Admitiendo una tensión máxima por torsión.

De acuerdo a lo visto el momento toros producido era:

$$M_t = P r \quad (8.1)$$

Si a este momento torsor se lo supone resistido por un árbol de diámetro constante por lo tanto la ecuación de resistencia resulta:

$$M_t = P r = \sigma_t \frac{J_p}{c} \quad (8.2)$$

Teniendo en cuenta el coeficiente de trabajo a la torsión. En secciones circulares es:

$$J_p = 2 J = \frac{2 \pi d^4}{64} \quad (8.3)$$

$$c = \frac{d}{2} = r \quad (8.4)$$

Por lo tanto

$$W_p = 0.2 d^3 \quad (8.5)$$

$$M_t = 0.2 d^3 \sigma_t \quad (8.6)$$

Utilizando potencia

$$N = \frac{P c}{75} \quad (8.7)$$

Reemplazando la velocidad tangencial ( $v_t$ )

$$V_t = \frac{2 \pi r n}{60} \quad (8.8)$$

Y expresando el radio en cm. podemos escribir la potencia como sigue:

$$N = \frac{2 \pi r n P}{(100)(60)(75)} = \frac{P r n}{71620} \quad (8.9)$$

$$M_t = P r = 71600 \frac{N}{n} = W_p \sigma_t = 0.2 d^3 \sigma_t \quad (8.10)$$

De donde operando y simplificando se tiene:

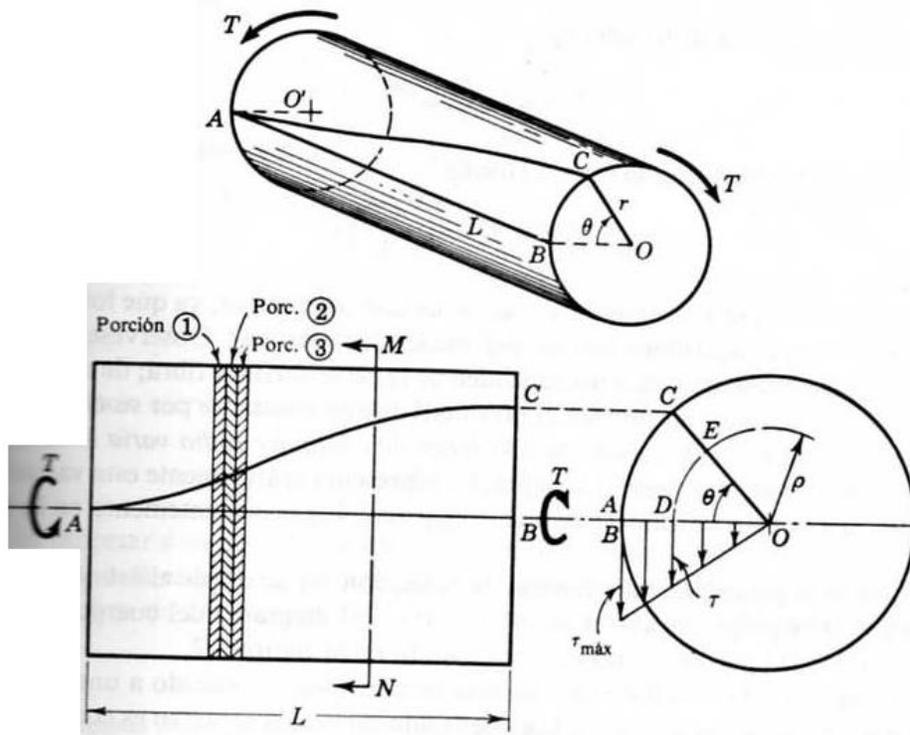
$$71620 \frac{N}{n} = 0.2 d^3 \sigma_t \quad (8.11)$$

$$d = \sqrt[3]{71620 \frac{N}{n 0.2 \sigma_t}} \quad (8.12)$$

$$d \cong 71 \sqrt[3]{\frac{N}{n \sigma_t}} \quad (8.13)$$

### 8.1.2 Admitiendo $\frac{1}{4}^0$ de deformación por metro de largo.

Cuando los árboles tienen cierta longitud, esa es una de sus condiciones de diseño.



De acuerdo con la figura si suponemos un sólido cilíndrico empotrado por un extremo y sometido a un momento de torsión en este caso se observa que una generatriz tal como la AB se deforma en forma de hélice tomando la posición AB'. Analizando la torsión experimentada por la sección libre se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\phi}{1} = \frac{\overline{AC}}{r} \quad (8.14)$$

Existe también proporcionalidad entre la deformación y la longitud del árbol y de acuerdo con los principios de la torsión se tiene:

$$\frac{\overline{AC}}{L} = \frac{\sigma_t}{G} \quad (8.15)$$

Donde  $\overline{AC}/L$  es la deformación unitaria a la torsión,  $\sigma_t$  esfuerzo a la torsión, L la longitud del árbol y G el módulo de elasticidad transversal que vale:

$$G = \frac{2}{5} E \quad (8.16)$$

Reemplazando L por su valor y despejando tenemos:

$$\overline{AC} = L \frac{\sigma_t}{G} = (100 \text{ cm}) \frac{\sigma_t}{G} \quad (8.17)$$

Por otra parte sabemos que:

$$\sigma_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{r M_t}{J_x} \quad (8.18)$$

Considerando la (8.14) tendremos:

$$\phi r = \alpha = \frac{r M_t 100}{J_x G}$$

Existe además una relación entre los arcos medidos en radianes y los ángulos que corresponden a dichos arcos que es:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\phi}{360^\circ} \quad (8.20)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\phi}{360^\circ} \quad (8.21)$$

Luego de la (8.20) y la (8.21) podemos escribir:

$$2\pi \frac{\phi}{360^\circ} = \frac{M_t 100}{J_x G} \quad (8.22)$$

Pero como  $J_x$  para una sección circular maciza es  $J_x = 0.05 d^4$  y  $\phi = 1/4$ , luego:

$$\left(\frac{2\pi}{360}\right) \frac{1}{4} = \left(\frac{M_t 100}{G}\right) \frac{1}{0.05 d^4} \quad (8.23)$$

Si reemplazamos  $M_t = 71620 N/n$  y  $G = 2/5 E = 800.000 kg/cm^2$

$$\left(\frac{2\pi}{360}\right) \frac{1}{4} = \left(\frac{100}{0.05 d^4}\right) \frac{M_t}{G} = \left(\frac{100}{0.05 d^4}\right) \frac{71620 N}{800000 n} \quad (8.24)$$

$$4.36 \times 10^{-3} = 89.525 \frac{N}{d^4 n} \quad (8.25)$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{89.525 N}{4.36 \times 10^{-3} n}} \cong 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad (8.26)$$

Esta fórmula que nos da el diámetro teniendo en cuenta una torsión máxima de  $1/4^\circ$  por metro en función de la potencia transmitida y del número de vueltas también puede plantearse en función del momento torsor recordando que:

$$M_t = 71620 \frac{N}{n} \quad (8.27)$$

$$\frac{N}{n} = \frac{M_t}{71620} \quad (8.28)$$

Reemplazando tendremos finalmente que:

$$d \cong 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \cong 12 \sqrt[4]{\frac{M_t}{71620}} \cong 0.734 \sqrt[4]{M_t} \quad (8.29)$$

## **9. TIPO DE TRANSMICION.**

La trasmisión del movimiento puede hacerse de varias maneras. Si un solo motor provee la energía y arrastra todas las máquinas de un taller, el comando se hace por transmisión general, si en cambio cada máquina es comandada por un motor el comando se hace en forma individual, si se reúnen maquinas afines y se las acciona separadamente, tendremos un comando por grupos o mixtos.

### **VENTAJAS DEL COMANDO INDIVIDUAL**

Permite accionar solamente la máquina que se utiliza aumentando el rendimiento al bajar el consumo inútil de energía, se evitan las grandes instalaciones necesarias, contra las paredes o colgadas del techo. Se ve facilitada la ubicación de máquinas, de acuerdo a las operaciones; disminuye drásticamente la cantidad de correas, con los problemas inherentes a las mismas; permite el mando individual, accionar máquinas de gran potencia que es la tendencia de la máquina herramienta actual.

Las desventajas principales son que disminuye el rendimiento individual; al ser pequeña la potencia, no se pueden realizar trabajos que abordan más potencia que la disponible y ella está calculada para trabajos normales.

## **10. VELOCIDAD CRITICA DE LOS ARBOLES**

### **RESONANCIA:**

- Cuando la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, tiene lugar un fenómeno de resonancia. La característica más importante de la resonancia es que da lugar a grandes desplazamientos, al amplificar de manera importante las vibraciones del sistema. En la mayor parte de los sistemas mecánicos, la presencia de grandes desplazamientos es un fenómeno indeseable ya que provoca la aparición de tensiones y deformaciones igualmente grandes que pueden ocasionar el fallo del sistema.
- También podemos decir que se manifiesta un efecto de resonancia cuando en un sistema de movimiento oscilatorio actúa una fuerza impulsora periódicamente, con periodo igual al de la oscilación, estas aumentan continuamente de amplitud y pueden llegar en algunos casos a producir la destrucción del sistema y pueden llegar en algunos casos a producir la destrucción del sistema oscilante.
- La resonancia es un fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración se acerca al periodo de vibración característico de dicho cuerpo. En el cual una fuerza relativamente pequeña aplicada en forma repetida, hace que una amplitud de un sistema oscilante se haga muy grande.

En estas circunstancias el cuerpo vibra, aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento tras cada una de las actuaciones sucesivas de la fuerza. En teoría, si se consiguiera que una pequeña fuerza sobre un sistema oscilara a la misma frecuencia que la frecuencia natural del sistema se produciría una oscilación resultante con una amplitud indeterminada.

El efecto de resonancia puede ser destructivo en algunos materiales rígidos como el vaso que se rompe cuando una soprano canta y alcanza y sostiene la frecuencia de resonancia del mismo. Por la misma razón, no se permite el paso por puentes de tropas marcando el paso, ya que pueden entrar en resonancia y derrumbarse.

Una forma de poner de manifiesto este fenómeno consiste en tomar dos diapasones capaces de emitir un sonido de la misma frecuencia y colocados próximos el uno del otro, cuando hacemos vibrar uno, el otro emite, de manera espontánea, el mismo sonido, debido a que las ondas sonoras generadas por el primero presionan a través del aire al segundo.

Así ocurre cuando a un péndulo se le da una ligera impulsión cada vez que llega al extremo de su carrera; la amplitud de la oscilación aumenta continuamente. También se da algunas veces el caso de una motocicleta que marchando sobre terreno empedrado comienza a saltar progresivamente haciendo peligrosa e imposible la marcha a aquella velocidad, simplemente porque las oscilaciones que en la moto producen las irregularidades del terreno son del mismo periodo que las propias del vehículo.

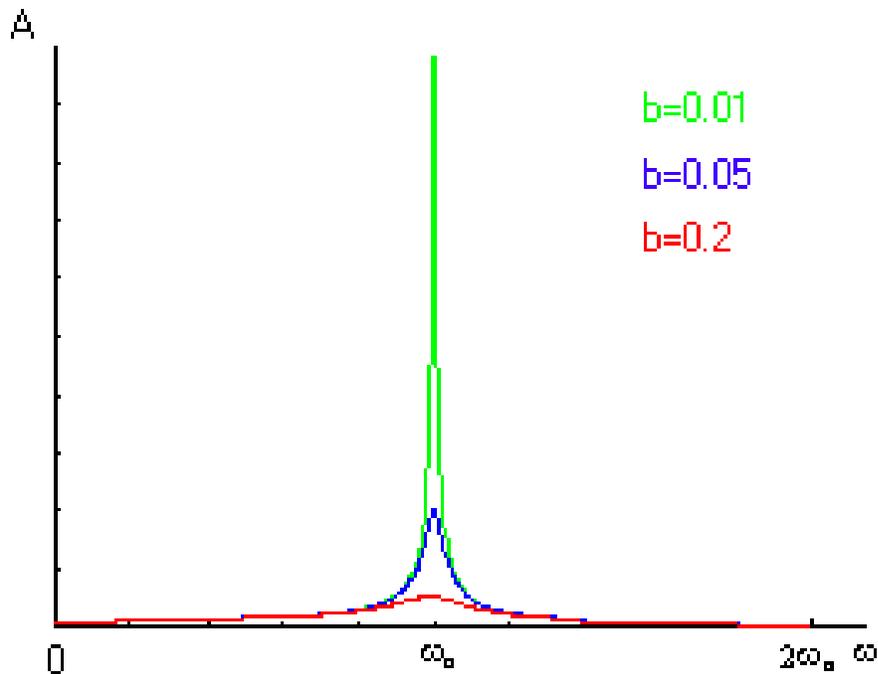
**Estos efectos de resonancia se dejan también sentir en los árboles según veremos.**

En consecuencia, las condiciones de resonancia deben de tratar de ser evitadas en el diseño y construcción de cualquier sistema mecánico. No obstante, en la mayor parte de los casos, las frecuencias de excitación no pueden controlarse al venir impuestas por los requerimientos de carácter funcional del sistema (por ejemplo, velocidades de giro). En tal caso, el objetivo será el control de las frecuencias naturales del sistema para evitar la presencia de resonancias.

**Gráficamente:** La amplitud y, por tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, depende no sólo de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia.

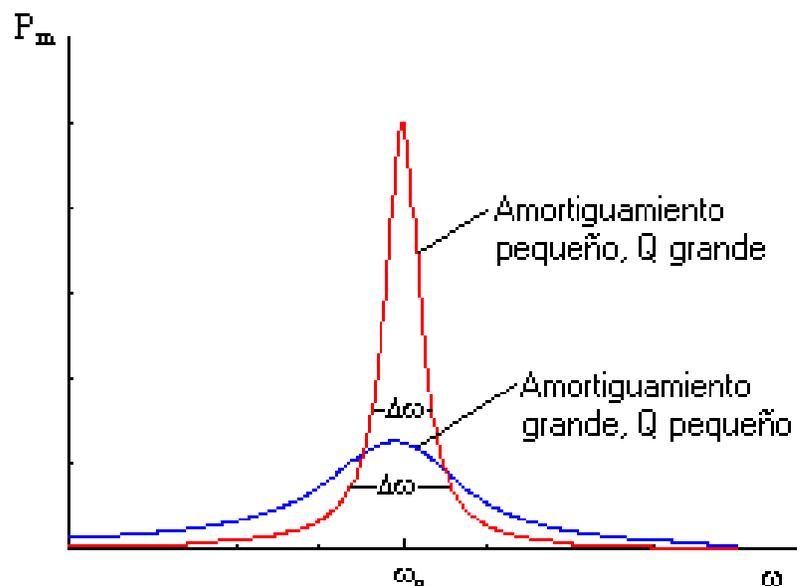
Se define la **frecuencia natural** de un oscilador como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor.

El fenómeno de resonancia se produce cuando la frecuencia impulsora es igual (o aproximadamente igual) a la frecuencia natural del sistema, es decir,  $\omega = \omega_0$ . En esta situación  $\delta = 2\pi$



En esta imagen se observa una gráfica que representa la amplitud frente a la frecuencia de un oscilador amortiguado cuando se encuentra presente una fuerza impulsora periódica. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural,  $\omega_0$ , aparece la resonancia. Se observa que la forma de la curva de resonancia depende del valor del coeficiente de amortiguamiento,  $b$ .

La cantidad media de energía absorbida en un ciclo es igual a la potencia media producida por la fuerza impulsora. En la figura se muestra un diagrama de la potencia media transmitida a un oscilador en función de la frecuencia de la fuerza impulsora o externa para dos valores diferentes de amortiguamiento (y por tanto de  $Q$ ).



Estas curvas reciben el nombre de **curvas de resonancia**. Cuando el amortiguamiento es pequeño (el valor de  $Q$  es alto), la potencia consumida en la resonancia es mayor y la resonancia es más aguda; es decir, la curva de resonancia es más estrecha, lo que quiere decir que la potencia suministrada es grande sólo cerca de la frecuencia de resonancia. Cuando el amortiguamiento es grande (el valor de  $Q$  es pequeño), la curva de resonancia es más achatada y la potencia suministrada toma valores más para  $w$  diferentes de la de resonancia.

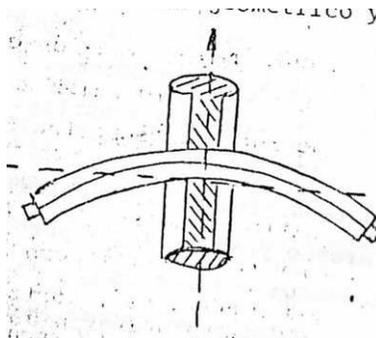
**Vibraciones mecánicas** : Una vibración mecánica se puede definir como un movimiento oscilatorio con respecto a una referencia que generalmente es estática y que es causado por una fuerza, ya sea interna o externa. La vibración de una maquina, o cualquier objeto, es inevitable. Algunos perciben las vibraciones mecánicas como un problema, sin embargo, si se detectan a tiempo, se pueden solucionar para evitar el desgaste o ruptura de un sistema.

**Velocidad Crítica**: Las velocidades que se originan de vibraciones violentas se conocen como “velocidades críticas”. Este término también se puede reducir aún más ya que existen varios tipos de velocidades críticas. Algunos ejemplos son: Velocidad crítica de flexión y velocidad crítica de torsión.

Un eje se puede considerar un resorte elástico a flexión. Cuando se aplica una fuerza externa sobre este eje, se produce una oscilación amortiguada. A la vez, esta oscilación efectúa una fuerza centrífuga (una fuerza que aleja un objeto del centro de rotación) debido a su movimiento circular. Cuando la velocidad de esta alcanza el valor de frecuencia de la oscilación del sistema se produce una resonancia. Si la resonancia del sistema marcha de manera irregular, este oscilara más y más violento hasta llegar a su ruptura. La velocidad de esta resonancia es la cual se denomina velocidad crítica de flexión.

Puesto que en el ejemplo anterior se mencionó que un eje se puede considerar un resorte, también efectúa oscilaciones torsionales amortiguadas cuando el sistema realiza un movimiento giratorio. Al igual que para una velocidad crítica de flexión, se produce una resonancia cuando las oscilaciones torsionales y la velocidad de servicio coincide con la frecuencia del sistema. La velocidad crítica de torsión puede resultar tan peligrosa como la velocidad crítica de flexión. Sin embargo la velocidad crítica de tensión se presenta solo en algunos casos.

**Consideremos** un árbol cuyo centro geométrico y de gravedad no coincide con el eje del mismo. Esta excentricidad dará lugar a una fuerza centrífuga que flexará el árbol el cual girara con una comba. La flecha producida por esta fuerza centrífuga se mantendrá constante en todas las posiciones del árbol mientras este gira y desaparecerá en el reposo



Pero observamos que el árbol soporta su propio peso y el de los órganos montados en él (volantes, poleas, etc.) lo que hará flexar el árbol en el reposo. Esta acción se sumara, cuando el árbol gire, a la fuerza centrífuga cuando el centro de gravedad pase bajo el eje en su plano vertical, produciendo en este momento una flexión mayor, que desaparecerá después, provocando en el árbol un movimiento oscilatorio forzado.

Si la velocidad del árbol es tal que el periodo de oscilación forzada coincide en la oscilación elástica propia del árbol, entonces la flecha aumenta en cada vuelta, llegando a hacer vibrar el árbol fuertemente, que puede llegar a romperse. La velocidad para la cual ocurre este fenómeno se denomina velocidad crítica.

**En general**, un árbol puede tener varias velocidades críticas, ya que pueden ser varias las masas montadas sobre él, en estado de oscilación unas respecto de otras produciendo vibraciones distintas y se hace necesario que la impulsión periódica del motor tenga una frecuencia mucho menor que la más lenta de las ondas propias del sistema a fin de que al variar el número de vueltas del árbol motor entre el máximo y el mínimo no se produzca nunca resonancia.

Se deduce de todo esto que un árbol no debe funcionar a velocidades igual a ninguna de sus velocidades críticas, las cuales son generalmente bastante elevadas, porque su marcha normal suele establecerse por debajo de la menor de ellas. Cuando se trata de máquinas que funcionan a velocidad muy elevada, se establece algunas veces su velocidad de régimen entre dos velocidades críticas.

## APENDICE

### BALANCEO DE ROTORES SÓLIDOS

En un sistema ideal el desbalance de rotores actúa sobre un solo plano. Sin embargo es más probable que un sistema se encuentre desbalanceado sobre varios planos. Cuando existe un desbalance de rotores, solo se puede tratar de dos tipos: desbalance estático y desbalance dinámico.

Un desbalance estático se presenta cuando masas desbalanceadas yacen sobre un plano singular, como es el caso de un rotor de disco delgado. Se puede detectar por medio de una prueba estática en la cual un conjunto eje-rueda es colocado sobre un par de rieles horizontales. La rueda rodara hasta que llegue a la posición en que el punto más pesado esta directamente abajo del eje. Este tipo de desbalance se puede detectar sin tener que hacer girar la rueda.

### BALANCEO SIMULTÁNEO EN DOS PLANOS

Quando el desbalance aparece sobre más de un plano, a este se le conoce como desbalance dinámico. A diferencia a una prueba estática, el desbalance dinámico sin puede detectarse sin hacer girar el rotor. Si consideramos un eje con dos discos y las dos masas desbalanceadas son iguales y a  $180^\circ$ , el sistema estará estáticamente balanceado

sobre el eje. Sin embargo, cuando el rotor esta girando, cada disco no balanceado establecerá su propia fuerza centrífuga que tendera a mecer el árbol en sus cojinetes.

### BALANCEO DE ROTORES FLEXIBLES

Cuando una operación se desarrolla a velocidades inferiores a la velocidad critica, la suposición de que un rotor no se deformara a causa de desbalance es perfectamente justificada. Sin embargo a velocidades mayores de la velocidad critica, el rotor sufrirá deformaciones ya que bajo estas condiciones aparecerán nuevas fuerzas centrífugas. Por ejemplo, si una unidad de desbalanceo se sitúa en el centro de un rotor rígido y simétrico, la fuerza centrífuga unitaria debido a este desbalanceo obtendrá en los apoyos reacciones de media unidad cada uno. Por otro lado, si se trata de un rotor flexible, la fuerza centrífuga deformará la estructura desplazara a la línea central de su posición inicial. En consecuencia, la línea central desplazada girará en torno y se presentará una nueva fuerza centrífuga que alejará las reacciones en los apoyos.

Es evidente que una maquina puede balancearse agregándole directamente masas correctoras en la mitad opuesta al desbalanceo. Sin embargo, es preferible balancearla en dos planos definidos cercanos a los extremos finales.

### VELOCIDADES CRÍTICAS SECUNDARIAS

Además de las velocidades críticas principales o comunes causadas por las fuerzas centrífugas de las masas desbalanceadas, se han observado algunas perturbaciones a la mitad de estas velocidades críticas.

Este efecto se ha observado solamente en flechas horizontales. En las verticales no se presenta, lo que indica que la gravedad debe ser una de sus causas. Existen dos tipos de estas perturbaciones, causadas por la gravedad en combinación con el desbalanceo, y con el rígido encorvamiento de la flecha.

Estos fenómenos se conocen como “velocidades criticas secundarias”, y tal como lo indica su nombre, su importancia y severidad son generalmente menores que las de las velocidades criticas “comunes” o primarias.

### VIBRACIONES EN MOTORES ELÉCTRICOS

Cuando se construye un motor eléctrico, es esencial tomar en cuenta las vibraciones mecánicas al igual que las vibraciones electromagnéticas para así asegurar su marcha tranquila y suave. La influencia de ambos dependerá principalmente de su velocidad máxima. Sin embargo, en aquí solo, mencionaremos los efectos de las vibraciones mecánicas para este tipo de motores.

Las vibraciones mecánicas en los motores eléctricos también dependen en gran parte de su construcción, por ejemplo si el rotor es bobinado. Si este es el caso, las bobinas suelen quedar desplazadas del eje, lo cual provoca este tipo de vibraciones. Estas vibraciones también pueden ser provocadas por algunas variaciones térmicas y mecánicas del aislante y el desplazamiento debido a la centrifugación por parte de las espiras del

bobinado. Algunos otros factores de estas vibraciones en los motores eléctricos pueden ser la turbina de ventilación, chapas mal apiladas, el colector, el descentramiento del paquete de chapas con respecto al eje, etc.

## VIBRACIONES EN TURBINAS DE VAPOR

Se ha observado que las vibraciones también se presentan en las turbinas debido principalmente al escape de vapor o de agua. Por ejemplo, el árbol de una turbina de vapor grande se encontró que oscilaba dentro de los cojinetes en una dirección axial con una frecuencia del orden de 20 ciclos por segundo. La causa de este problema se encontró que era una variación de la presión en el espacio posterior al “pistón inerte” que era causado por un escape de vapor hacia dentro de este espacio. Como con una valvula de diesel, la velocidad con el que este escape tiene lugar depende de la posición longitudinal del árbol de la turbina.

## CONCLUSIONES

Desde que se crearon las primeras maquinas a principios del siglo IXX, las vibraciones mecánicas siempre han sido una parte inevitable de ellas. Sin embargo, al pasar de los años gracias a varias innovaciones en la ingeniería y avances tecnológicas se ha logrado reducir este fenómeno para aumentar la longevidad de las maquinas. Es evidente que siempre existirán las vibraciones mecánicas, pero por ejemplo con el estudio de diferentes tipos de materiales o con la alteración de algunos existentes, se podrá controlar las fuerzas que ocasionan las vibraciones mecánicas para evitar el desgaste y/o ruptura de las piezas de una máquina

## 11. EJES

### GENERALIDADES.

Son elementos de máquinas que sirven de soporte para otros órganos, los cuales pueden girar u oscilar alrededor de este.

**Cuando el eje es inmóvil y los órganos que soporta giran sobre, el eje se denomina fijo. En cambio si el eje se mueve girando al mismo tiempo que los órganos fijados en él, se llama giratorio.**

Los ejes no transmiten potencia y por ello están sometidos solamente a esfuerzos de flexión, en algunos casos también sufren efecto de fatiga, como por ejemplo los ejes de vagones. Para los ejes fijos se toma el valor de la resistencia estática, pero para los giratorios el de la resistencia a las flexiones alternadas.

Se utilizan en determinadas maquinas como dinamos, turbinas, etc., en cuyo caso las piezas montadas sobre el eje son de peso considerable y por lo tanto el esfuerzo de flexión es preponderante con respecto al esfuerzo de torsión. Los ejes propiamente dichos

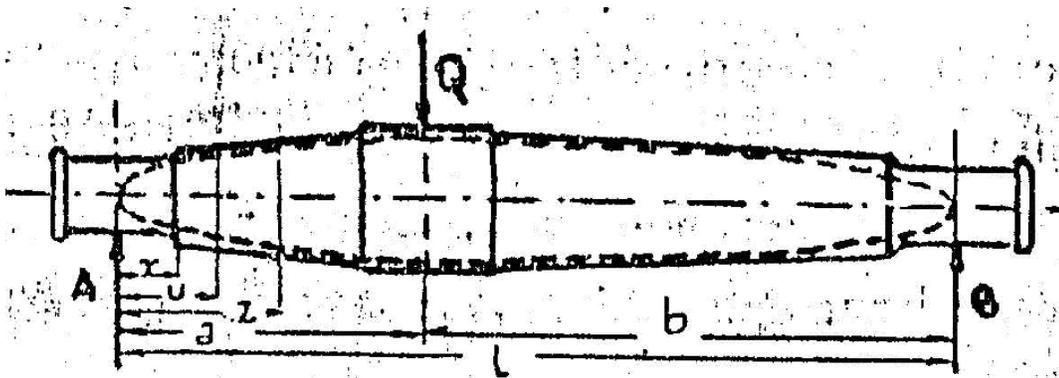
son aquellos que animados de un movimiento de rotación soportan cargas importantes tales como los ejes de vagones y locomotoras.

En este último caso se calculó en base de una carga estática vertical (peso propio y sobrecarga) pero además es necesario considerar los esfuerzos dinámicos verticales y horizontales difíciles de analizar y determinar pero que se toman en cuenta reduciendo ( $\sigma_f$ ) el coeficiente de trabajo a la flexión.

Los materiales empleados en la fabricación de los ejes son los aceros al igual que en los árboles. Se pueden conformar por forja, para aumentar su resistencia, o sometidos a un tratamiento térmico, para aumentar las propiedades mecánicas.



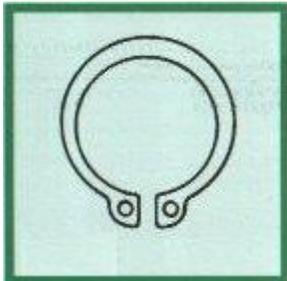
**Tipos de ejes** Los ejes generalmente adoptan una sección tal para que las tensiones sean aproximadamente uniformes a lo largo de su longitud (de igual resistencia a la flexión). Por ello, en diferentes tramos existen diámetros diferentes siendo extraña la forma cilíndrica en toda su longitud. Esto se debe a que las cargas que soportan son considerables y el momento flector máximo también, lo que obliga a una sección grande si se mantuviera para todo el eje que sería poco rentable



## Anillos de sujeción

Tienen como misión impedir el desplazamiento axial del eje. Los anillos de sujeción, también llamados anillos de resorte o de retención, se componen de alambre de acero endurecido de sección transversal redondo o rectangular.

Hay dos formas de colocación o tipos de anillos. Están los que son necesarios pasarlos forzosamente por el eje hasta que se introducen en una ranura formando una retención, y los que pueden ensancharse empujándolos a través de una abertura y que se expansionan en una ranura.



En un eje se distinguen las siguientes partes principales:

- 1) Cuerpo:** El cuerpo es de sección variable y por lo general sirve de enlace a los gorriones y su sección longitudinal debe comprender al sólido de igual resistencia.
- 2) gorriones o muñones de extremidad:** Los gorriones de extremidad son partes cilíndricas que sirven de apoyo al eje. Ellos se alojan dentro de cojinetes.
- 3) gorriones intermedios:** La porción intermedia cilíndrica recibe la carga  $Q$  y por lo tanto debe determinarse por el momento flector correspondiente.

La longitud de los gorriones depende de la presión específica, de la condición de lubricación.

## 10.2 CALCULO DE LOS EJES A LA FLEXION

Supondremos el caso en que las cargas son normales al eje geométrico del mismo. Una carga  $Q$  actuando en un punto intermedio de los apoyos A y B

Al estar en equilibrio se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = Q - R_A - R_B = 0 \\ \sum M_B = M_Q - M_A - M_B = Q b - R_A L - R_B 0 = 0 \end{array} \right. \quad (10.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = Q - R_A - R_B = 0 \\ \sum M_B = M_Q - M_A - M_B = Q b - R_A L - R_B 0 = 0 \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Por lo que

$$Q b = R_A L \quad (10.3)$$

Y despejando tenemos la reacción en el apoyo A y tomando momento en el apoyo A se obtiene de igual forma la reacción en el apoyo B.

$$R_A = \frac{Q b}{L} \quad (10.4)$$

$$R_B = \frac{Q a}{L} \quad (10.5)$$

Se puede calcular las dimensiones de los gorriones de extremidad. El momento flector máximo se produce donde actúa la carga y su valor será:

$$M_f = R_A a = R_B b = \frac{Q b a}{L} \quad (10.6)$$

Pero también es:

$$M_f = W \sigma_f \quad (10.7)$$

Donde el momento resistente para una sección circular era  $W = 0,1 d^3$  luego reemplazando en la (10.7) y en la (10.6)

$$\frac{Q b a}{L} = (0,1 d^3) \sigma_f \quad (10.8)$$

De donde podemos obtener el valor del diámetro:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Q b a}{0,1 \sigma_f L}} \quad (10.9)$$

Que también se puede escribir:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_f}{0,1 \sigma_f}} \quad (10.10)$$

Calculando el diámetro del eje en el lugar donde actúa la carga, se determina los diámetros para otras secciones cualquiera y se traza la curva que representa el sólido de igual resistencia y luego se traza el eje por tramos cilíndricos o cónicos según convenga.

Manteniendo la nomenclatura de la figura calculamos los momentos flectores de las secciones x, u, z y a y los diámetros correspondientes a cada una de ellas.

$$M_{f x} = W_x \sigma_f = 0,1 d_x^3 \sigma_f = R_A x \quad (10.11)$$

$$M_{f u} = W_u \sigma_f = 0,1 d_u^3 \sigma_f = R_A u \quad (10.12)$$

$$M_{f z} = W_z \sigma_f = 0,1 d_z^3 \sigma_f = R_A z \quad (10.13)$$

$$M_{f a} = W_a \sigma_f = 0,1 d_a^3 \sigma_f = R_A a \quad (10.14)$$

De donde se obtendrá que para una distancia x de la carga al apoyo A:

$$d_x = \sqrt[3]{\frac{R_A x}{0.1 \sigma_f}} = \sqrt[3]{\frac{M_f x}{0.1 \sigma_f}} \quad (10.15)$$

Y de igual forma para los demás, pudiéndose luego construir la curva y el eje. En forma similar se procederá cuando exista más de una carga a soportar por el eje.

## 2.11 GORRONES Y MUÑONES.

Los gorriones o muñones, son partes de los árboles y ejes mediante las cuales estos descansan sobre las piezas que les sirven de sostén; la clasificación más común es la siguiente:

- a) Gorriones radiales llamados también muñones o golletes.
- b) Gorriones axiales llamados también pivotes.

### 3.11.1 TIPOS DE GORRONES RADIALES.

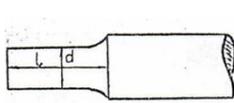


Figura 3.8

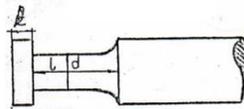


Figura 3.9

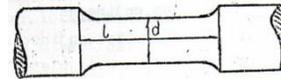


Figura 3.10

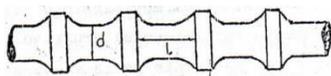


Figura 3.11

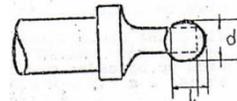


Figura 3.12

Un gorrón es radial cuando la carga a la que está sometido es normal al eje del árbol que la soporta.

El material usado en la construcción del gorrón es el mismo que el del árbol o eje del que forma parte. Cuando el árbol es cilíndrico no se puede distinguir, cosa que si sucede cuando existen anillos de tope o un menor diámetro del eje que cumple justamente la función de evitar desplazamientos axiales.

Se procura dar al gorrón una superficie perfectamente lisa, con el objeto de disminuir las perdidas por rozamiento entre el gorrón y las poleas, ruedas, cojinetes, etc., que gira sobre el, e inversamente.

Las variaciones de diámetro, entre el eje y los gorriones se toman con radios, evitando cantos vivos por la concentración de tensiones que ellos producen.

Los tipos más comunes de gorriones radiales que existen son:

- a) Gorrón frontal: Un extremo del eje o árbol a un diámetro menor  $d$  y con una longitud  $l$  (**Fig.3.8**).
- b) Gorrón frontal con collar: Difiere de los anteriores porque presenta en el extremo un collar  $b$  (**Fig.3.9**).

- c) Gorrón frontal hueco: Semejante a los anteriores pero hueco por dentro.
- d) Gorrón intermedio: El árbol esta torneado a un diámetro menor sobre una longitud  $l$  a fin de utilizar cojinetes partidos mas livianos y economizar anillos de posición (**Fig.3.10**).

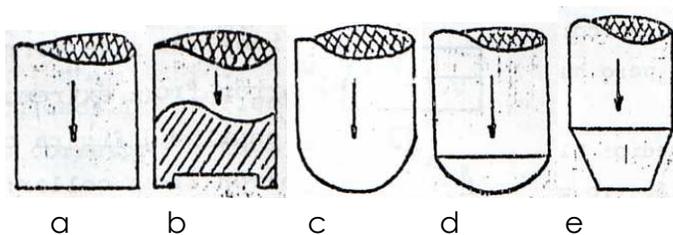
El cálculo de los gorriones intermedios, se hace teniendo en cuenta que ellos sufren esfuerzos de torsión y flexión; mientras que los esfuerzos en los gorriones extremos, son solo de flexión.

- e) Gorrón intermedio de anillos: Empleando en el caso que el árbol deba recibir además de cargas normales, esfuerzos axiales considerables (**Fig.3.11**).
- f) gorrón esférico: Empleado en los casos en que además de soportar cargas normales, deba al girar sobre si mismo permitir desplazamientos angulares del árbol (**Fig.3.12**).

### 3.11.2 GORRONES AXIALES

Cuando un eje recibe empuje o esfuerzos axiales y lo trasmite a un apoyo recibe su extremidad el nombre de pivote, o gorrón axial. La forma que adopta esa extremidad, da lugar a la siguiente clasificación:

- a) Pivote de asiento plano.
- b) Pivote de asiento anular.
- c) Pivote de asiento esférico.
- d) Pivote de asiento a casquete.
- e) Pivote de asiento tronco cónico.
- f) Pivote de asiento a anillos múltiples.



**Figura 3.13**

La presión que ejerce el pivote se trasmite al apoyo sobre un plano normal al apoyo. Los pivotes planos son poco usados, debido a la dificultad de la lubricación. Por lo general, se utilizan los pivotes de apoyo anular, de casquete, o tronco-cónico; los primeros apoyan algunas veces sobre un disco de acero templado y ambos (pivote y disco) constan de agujeros de lubricación, permitiendo así no solo que esta se haga eficazmente sino también un mejor apoyo después de un cierto tiempo (con respecto al plano) debido al desgaste que se producen por las cargas excéntricas.