Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Jujuy

TÉCNICAS Y ESTRUCTURAS DIGITALES

Práctica de Sistemas Numéricos

Sistemas Numéricos (1)

- Estructuras formadas por símbolos y leyes que permiten numerar, ordenar, contar y efectuar operaciones aritméticas *(Principios Digitales y Circuitos Lógicos. S. Martínez)*.
- Clasificación
  - Según su estructura
    - ✓ Posicionales **1**, **1**5, **1**78, **1**928, **1**3721
    - ✓ No posicionales I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
  - Según la base
    - ✓ Binario 0, 1, 10 ,11, 100, 101, 110, 111, 1000, …
    - ✓ Octal 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 , 11, 12, …
    - ✓ Decimal 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, 10, 11, 12, 13, …
    - ✓ Hexadecimal **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, A, B, C, D, E, F**, 10, 11, 12, 13, …., 1F, 20, 21 …, 2E, 2F, 30

Sistemas Numéricos

- Métodos de Aproximación
  - Truncamiento
  - Redondeo Simétrico
- Métodos de Cambio de Base
  - Aritmética en Base Origen
  - Aritmética en Base Destino
  - Cambio de Base Directo
- Sistemas Numéricos Acotados
  - Sin Signo
  - Con Signo
  - Notación Complemento
- IEEE754

Métodos de Aproximación (1)

- Truncamiento
  - El truncamiento permite ajustar la parte fraccionaria de un número eliminando los dígitos excedentes.
  - Dado el valor $+19{,}3472_{10}$ aproximar, por truncamiento, a 2 cifras su parte fraccionaria

$$+19{,}34\cancel{72}_{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{+19{,}34_{10}}$$

Métodos de Aproximación (2)

- Redondeo
  - El redondeo permite ajustar la parte fraccionaria de un número reduciendo el error de representación al eliminar los dígitos excedentes
  - Se reduce la parte fraccionaria a f+1 posiciones y se sumar $1/2\ b^{-f}$
  - Y luego, se reduce la parte fraccionaria a f posiciones
  - Por ejemplo: $+19{,}3472_{10}$ aproximado por redondeo a 2 cifras fraccionarias será $+19{,}35\cancel{72}_{10}$

Número	f+1	$+1/2\ b^{-f}$	Resultado
+19,3472	+19,347~~2~~	+19,347	+19,35
		0,005	
		+19,35~~2~~	

Cambio de base (1)

- Aritmética en Base Origen (ABO)
  - La parte entera y parte fraccionaria del número se tratan por separado
  - Parte Entera
    1. Se divide el número en la base destino (expresada en el sistema origen), conservándose el resto obtenido como dígito para construir el equivalente en el sistema destino.
    2. Se divide el cociente (entero) obtenido en la división anterior nuevamente por la base destino, y se conserva el resto obtenido como dígito para construir el N° equivalente.
    3. Se repite el paso 2 hasta que el cociente obtenido sea menor que el divisor, construyéndose el nuevo valor a partir del último cociente obtenido y todos los restos anteriores.

Cambio de base (2)

- Aritmética en Base Origen (ABO)
  - Parte Fraccionaria
    1. La parte fraccionaria se multiplica por la base destino (expresada en el sistema origen), separándose la parte entera obtenida como dígito de la parte fraccionaria del número en el sistema destino.
    2. La parte fraccionaria obtenida se multiplica nuevamente por la base destino y la parte entera resultante se separa para formar otro dígito de la parte fraccionaria del nuevo número.
    3. El paso 2 se repite hasta que la parte fraccionaria se vuelve cero o se obtenga la precisión fraccionaria deseada (cantidad de dígitos necesaria).

Cambio de base (3)

- Aritmética en Base Origen (ABO)
  - Ejemplo: represente el valor $-141{,}269_{10}$ en octal
  - Parte Entera

141 | 8
5   17 | 8
1   2

$N_E=215$

  - Parte Fraccionaria

$0{,}269 * 8 = 2 + 0{,}152$
$0{,}152 * 8 = 1 + 0{,}216$
$0{,}216 * 8 = 1 + 0{,}728$
$0{,}728 * 8 = 5 + 0{,}824$
$0{,}824 * 8 = 6 + 0{,}592$

$N_F=0{,}21156$

  - Resultado: $-215{,}21156_8$

Cambio de base (4)

- Aritmética en Base Origen (ABO)
  - Ejemplo: represente el valor $-141{,}269_{10}$ en octal
  - Parte Entera

$$\begin{array}{r|l} 141 & 8 \\ \hline 5 & 17 \;|\; 8 \\ & 1 \quad\; 2 \end{array}$$

$N_E=215$

  - Parte Fraccionaria

$N_F=0{,}21156$

$0{,}269 * 8 = 2 + 0{,}152$

$0{,}152 * 8 = 1 + 0{,}216$

$0{,}216 * 8 = 1 + 0{,}728$

$0{,}728 * 8 = 5 + 0{,}824$

$0{,}824 * 8 = 6 + 0{,}592$

  - Resultado:

$-215{,}21156_8$

Cálculo de Error Absoluto y Relativo

$0{,}269 * 8 = 2 + 0{,}152$

$0{,}269 = 2 * 8^{-1} + 0{,}152 * 8^{-1}$

Error Absoluto: 0,019

Error Relativo: 7%

$0{,}269 = 2 * 8^{-1} + 1 * 8^{-2} + 0{,}216 * 8^{-2}$

Error Absoluto: 0,003375

Error Relativo: 1,25%

$0{,}269 = 2 * 8^{-1} + 1 * 8^{-2} + 1 * 8^{-3} + 0{,}728 * 8^{-3}$

Error Absoluto: 0,001421875

Error Relativo: 0,53%

$0{,}269 = 2 * 8^{-1} + 1 * 8^{-2} + 1 * 8^{-3} + 5 * 8^{-4} + 0{,}824 * 8^{-4}$

Error Absoluto: 0,0002

Error Relativo: 0,07%

Cambio de base (4)

- Aritmética en Base Destino (ABD)
  - El método consisten en
    1. Escribir la ecuación polinómica del número (en el sistema origen).
    2. Reemplazar cada valor de la ecuación anterior por su equivalente en el sistema destino.
    3. Finalmente, calcula la expresión obtenida

Cambio de base (5)

- Aritmética en Base Destino (ABD)
  - Ejemplo: represente el valor $+3B,C3_{16}$ en decimal
  - Ecuación polinómica

$$(3x10^{1}+Bx10^{0}+Cx10^{-1}+3x10^{-2})_{16}$$

  - Reescribiendo la ecuación

$$(3x16^{1}+11x16^{0}+12x16^{-1}+3x16^{-2})_{10}$$

  - Resultado: $\mathbf{+59{,}7578125_{10}}$

HEX	DEC
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15
10	16

Cambio de base (6)

- Cambio de Base Directo
  - Para aplicar el cambio directo de base debe existir una relación de potencias entre la base origen y la base destino.
  - Caso 1: $b=p^x$ (b base origen, p base destino)

    x indica la cantidad de dígitos del sistema destino p que se usarán para representar un dígito del sistema origen b.
  - Caso 2: $b^x=p$ (b base origen, p base destino)

    x indica la cantidad de dígitos del sistema origen b que se tomarán para obtener un dígito del sistema destino p

Cambio de base (7)

- Cambio de Base Directo
  - Ejemplo: represente el valor $+3B,C2_{16}$ en binario
  - Relación entre las bases (hexadecimal y binaria)

$$16=2^{?}$$

?=4 esto significa que se necesitan 4 dígitos binarios para representar 1 dígito hexadecimal

  - Representación

$$+3B,C2_{16}$$

  - Resultado: $+0011\ 1011,1100\ 0010_{2}$

HEX	BIN
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Sistemas Numéricos Acotados (1)

- Sistemas Sin Signo $(b,k,f)_{SS}$
- Sistemas Con Signo $(b,k,f)_{CS}$
- Sistemas con Notación Complemento$(b,k,f)_{NC}$

b: base (sistema numérico)

k: cantidad de posiciones enteras

f: cantidad de posiciones fraccionarias

Sistemas Numéricos Acotados (2)

- Representación en Sistemas Sin Signo $(b,k,f)_{SS}$
  - *k* (cantidad de posiciones enteras) debe ser suficiente para contener los dígitos de la parte entera del número. Caso contrario se produce desborde.
  - La parte fraccionaria del número puede aproximarse a *f* (cantidad de posiciones fraccionarias).
  - Los sistemas sin signo sólo representan el valor numérico sin considerar el signo (positivo o negativo) del valor original.

Sistemas Numéricos Acotados (3)

- Representación en Sistemas Sin Signo $(b,k,f)_{SS}$
  - Ejemplo: represente $-10011001,110101100001_2$ en $(8,5,2)_{SS}$

Paso 1: realizar cambio de base

$$-231,6541_8$$

Paso 2: aproximar parte fraccionaria

$$-231,66_8$$

$$\begin{array}{r} 231,654\cancel{1} \\ +\underline{\quad 0,004} \\ 231,66\cancel{0} \end{array}$$

Paso 3: representar en el sistema

$$-231,66_8$$

_ _ _ _ _ , _ _

0 0 2 3 1 , 6 6

Se rellena con 0

Aprox. por redondeo.

Sistemas Numéricos Acotados (4)

- Representación en Sistemas Con Signo $(b,k,f)_{CS}$
  - *k* (cantidad de posiciones enteras) debe ser suficiente para contener los dígitos de la parte entera del número. Caso contrario se produce desborde.
  - La parte fraccionaria del número puede aproximarse a *f* (cantidad de posiciones fraccionarias).
  - El signo ocupa la posición más significativa de la parte entera, siendo 0 para valores positivos y 1 para negativos.

Sistemas Numéricos Acotados (5)

- Representación en Sistemas Con Signo $(b,k,f)_{CS}$
  - Ejemplo: represente $+19{,}376_{10}$ en $(10,4,2)_{CS}$

$$+19{,}37\cancel{6}$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ ,\ \_\ \_$$

SIGNO

$$0\ 0\ 1\ 9\ ,\ 3\ 7$$

Aprox. por truncam.

  - Si el número fuese negativo (-19,376) se representa como

$$1\ 0\ 1\ 9\ ,\ 3\ 7$$

Sistemas Numéricos Acotados (6)

- Representación en Notación Complemento $(b,k,f)_{NC}$
  - *k* (cantidad de posiciones enteras) debe ser suficiente para contener los dígitos de la parte entera del número. Caso contrario se produce desborde.
  - La parte fraccionaria del número puede aproximarse a *f* (cantidad de posiciones fraccionarias).
  - El signo ocupa la posición más significativa de la parte entera, siendo 0 para valores positivos y 1 para negativos.
  - Los números positivos se representan como en los sistemas CS
  - Los números negativos se representan tras aplicar el proceso de complementación.

Sistemas Numéricos Acotados (7)

- Representación en Notación Complemento $(b,k,f)_{NC}$
  - Ejemplo: represente $+32{,}561_8$ en $(8,4,2)_{NC}$

$+32{,}56\cancel{1}$

_ _ _ _ , _ _

SIGNO

0 0 3 2 , 5 6

Aprox. por truncam.

  - Si el número fuese negativo será necesario aplicar el proceso de COMPLEMENTACIÓN

$-b^{-f} = 1\,(b-1)(b-1)\ldots(b-1),(b-1)\ldots(b-1)$

$-b^{-f}-|N|+b^{-f}$

$b^{-f} = 0 \ldots 0, 0 \ldots 0\,1$

	1 7 7 7 , 7 7
-	0 0 3 2 , 5 6
	1 7 4 5 , 2 1
+	0 0 0 0 , 0 1
	1 7 4 5 , 2 2

Sistemas Numéricos Acotados (8)

- Cambio de Signo
  - Ejemplo: cambie el signo del número 0018B,C31 del sistema $(16,5,3)_{CS}$

$$
\begin{array}{c}
0\,0\,1\,8\,B\,,\,C\,3\,1 \\
\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,,\,\_\,\_\,\_ \\
\mathbf{1}\,0\,1\,8\,B\,,\,C\,3\,1
\end{array}
$$

  - Ejemplo: cambie el signo del número 156,27 del sistema $(8,3,2)_{CS}$

$$
\begin{array}{c}
1\,5\,6\,,\,2\,7 \\
\_\,\_\,\_\,,\,\_\,\_ \\
\mathbf{0}\,5\,6\,,\,2\,7
\end{array}
$$

Sistemas Numéricos Acotados (9)

- Cambio de Signo
  - Ejemplo: cambie el signo del número 00C27,E19 del sistema $(16,5,3)_{NC}$

$$\begin{array}{r} 1FFFF,FFF \\ -\underline{00C27,E19} \\ 1F3D8,1E6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1F3D8,1E6 \\ +\underline{00000,001} \\ 1F3D8,1E7 \end{array}$$

Es necesario complementar el valor para representarlo como negativo

  - Ejemplo: cambie el signo del número 173,11 del sistema $(8,3,2)_{NC}$

$$\begin{array}{r} 177,77 \\ -\underline{173,11} \\ 004,66 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 004,66 \\ +\underline{000,01} \\ 004,67 \end{array}$$

Es necesario complementar el valor para obtener la imagen original, que se representará como valor positivo

Estándar IEEE754 (1)

- Representación de valores en punto flotante
- Precisión Simple (32 bits)

S	Exponente								Mantisa																						
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	8 bits								23 bits																						

- Precisión Doble (64 bits)

S	Exponente											Mantisa													
63	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	51	50	49	48	47	46	45	44	43	...	4	3	2	1	0
1	11 bits											52 bits														

Estándar IEEE754 (2)

- Representación en Precisión Simple
- Elementos
  - Signo (1 bit)
  - Exponente (representado en exceso) (8 bits)
  - Mantisa (23 bits)

S	Exponente								Mantisa																						
31	**30**	29	28	27	26	25	24	**23**	**22**	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**0**
1	8 bits								23 bits																						

Estándar IEEE754 (3)

- Representación en Precisión Simple
- Ejemplo: represente $-326{,}5123_8$ en IEEE754 PS
  - Signo del Número: 0 para + y 1 para -
  - Exponente (cantidad de posiciones que se desplaza la coma en la representación binaria)

    Se calcula como $(2^{n-1}-1)$+desplazamiento (n bits de exponente)
  - Mantisa (dígitos binarios ubicados después de la coma)

Estándar IEEE754 (4)

- Representación en Precisión Simple
- Ejemplo: represente $-326{,}5123_8$ en IEEE754 PS
  - Signo del Número: 1
  - Exponente: ?
  - Mantisa: $1\ 010\ 110\ 101\ 001\ 010\ 011_2$
    - ✓Binario $011\ 010\ 110{,}101\ 001\ 010\ 011_2$
    - ✓Desplazamiento $01{,}1\ 010\ 110{,}101\ 001\ 010\ 011_2$

    La coma se desplazó 7 posiciones

Estándar IEEE754 (5)

- Representación en Precisión Simple
- Ejemplo: represente $-326{,}5123_8$ en IEEE754 PS
  - Exponente: 10000110_2
    - ✓ Deplazamiento: +7 (hacia izquierda)
    - ✓ Exceso para PS: $2^{8-1} - 1 = 127$
    - ✓ Cálculo de exponente: $127 + 7 = 134$
    - ✓ Representación binaria: 10000110_2

1 10000110 10101101010010100110011

Estándar IEEE754 (6)

- De IEEE754 a número con signo explícito

1 10000110 1010110101001010011

- ¿Cómo obtenemos el número (octal)?
  - Signo: 1 (valor negativo)
  - Exponente: 10000110_2
    - ✓ Convertir a decimal: 134
    - ✓ Quitar exceso (PS): 134-127=7
  - Mantisa: 1,1010110101001010011

1,1010110,101001010011 → $-326,5123_8$

3 2 6 , 5 1 2 3