Unidad 2

Parte 2 – Métodos de Interpolación

Dr. J. Federico Medrano

Interpolación Polinomial de NEWTON en DIFERENCIAS DIVIDIDAS

- El análisis anterior (interpolación lineal, cuadrática) puede generalizarse para ajustar un polinomio de n-ésimo grado a n+1 datos. El polinomio de n-ésimo grado es:
- $\boldsymbol{P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdot\cdot\cdot + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdot\cdot\cdot(x - x_{n-1})}$
- P es el polinomio de Lagrange de grado n que coincide con la función f en los números distintos x_0 , x_1 ,….., x_n

Interpolación Polinomial de NEWTON en DIFERENCIAS DIVIDIDAS

- Para un polinomio de *n*-ésimo grado se requieren $n + 1$ puntos: $[x0, f(x0)]$, $[x1, f(x1)]$,..., $[xn, f(xn)]$. Usamos estos datos y las siguientes ecuaciones para evaluar los coeficientes:
- $b0 = f(x_0)$
- $b1 = f[x_0, x_1]$
- $b2 = f[x_0, x_1, x_2]$
- .
- .
- $bn = f[x_0, x_1, \cdot\cdot\cdot, x_{n-1}, x_n]$

Interpolación Polinomial de NEWTON en DIFERENCIAS DIVIDIDAS

- Introducimos lo que se conoce como notación de diferencia dividida. Diferencias divididas de orden cero de la función *f*,

$$f[x_0] = f(x_0)\,,\; f[x_1] = f(x_1), \cdots,\; f[x_n] = f(x_n)$$

- Por ejemplo, la *primera diferencia dividida* en forma general se representa como

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\,,\; f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}\,, \ldots,\; f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

- La *segunda diferencia dividida*, que representa la diferencia de las dos primeras diferencias divididas, se expresa en forma general como

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}\,,\; f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}\,, \ldots$$

Interpolación Polinomial de NEWTON en DIFERENCIAS DIVIDIDAS

- En forma similar, la *n-ésima diferencia dividida* es

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- Reemplazando, se obtiene el *polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas*. Que toma la forma reducida:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

Tabla de Diferencias Divididas

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$			

Diferencias Divididas

- Ejemplo: dados los valores de la Tabla 1, construya un polinomio interpolador de Newton en diferencias divididas para calcular P(1.5)

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Diferencias Divididas

- Polinomio interpolador de Newton en diferencias divididas de grado 4

$$P_4(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{4} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})$$

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)$$

$$+ 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)$$

y, $P_4(1.5) = 0.5118200$

Diferencias Finitas: Fórmulas de Newton Progresiva y Regresiva

- Nos preguntamos, ahora, ¿cómo puede expresarse el polinomio de interpolación para datos Lagrangianos; es decir, $p(x_i) = f(x_i) = y_i$ cuando los nodos están igualmente espaciados?
- Supongamos que los nodos son de la forma: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ con $x_i = a+ih$, $i = 0, \ldots, n$ y $h = (b-a)/n$; entonces, podemos relacionar las diferencias divididas de $f(x)$ con las llamadas Diferencias Finitas (D.F.) de $f(x)$. Pero, ¿cómo se definen?

- Llamamos **D.F. progresiva** de f de orden k >= 0 en un punto x, al valor

$$\Delta^k f(x) = \begin{cases} f(x) \ \ \texttt{si} \ \ k = 0 \\ f(x+h) - f(x) \ \ \texttt{si} \ \ k = 1 \\ \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right) \ \ \texttt{si} \ \ k > 1 \end{cases}$$

- Si usamos como punto un nodo de interpolación, entonces las D.F. progresivas serán

$$\Delta^0 y_i = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$$
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0, \ldots, n-1$$
$$\Delta^k y_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_i\right), i = 0, \ldots, n-k$$

- Llamamos **D.F. regresiva** de f de orden k >= 0 en un punto x, al valor:

$$\nabla^0 f(x) = f(x)$$
$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$
$$\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1} f(x)\right)$$

- O bien

$$\nabla^0 y_i = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$$
$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, \ldots, n$$
$$\nabla^k y_i = \nabla\left(\nabla^{k-1} y_i\right), i = k, \ldots, n$$

- Ahora, con esta nomenclatura, es fácil comprobar la propiedad siguiente:
- **<u>Propiedad</u>**: Dada f evaluada en nodos igualmente espaciados, $x_i = a + ih$, i = 0, . . . n , entonces:

1. $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}$, $k = 0, \ldots, n$ *(D.D. ascendentes mediante D.F. progresivas)*
2. $f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k y_n}{k!h^k}$, $k = 0, \ldots, n$ *(D.D. descendentes mediante D.F. regresivas).*

Fórmula de Newton Progresiva

$$P_N(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- pero si realizamos el cambio de variable:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow \frac{x - x_i}{h} = \frac{x - (x_0 + ih)}{h} = s - i$$

- Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} P_N(s) = \quad & \Delta^0 y_0 + \Delta y_0 s + \Delta^2 y_0 \tfrac{s(s-1)}{2!} + \cdots + \Delta^n y_0 \tfrac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} = \\ = \quad & \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0 \end{aligned}}$$

Fórmula de Newton Regresiva

$$P_N(x) = \nabla^0 y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1)$$

- Como antes, si hacemos el cambio:

$$t = \frac{x_n - x}{h} \Rightarrow \frac{x_{n-i} - x}{h} = \frac{(x_n - ih) - x}{h} = t - i$$

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} w \\ k \end{array}\right) = \frac{w(w-1)\cdots(w-k+1)}{k!} \text{ con } w = s \text{ ó } w = t.}$$

- tenemos la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) = {} & \nabla^0 y_n - \nabla y_n t + \nabla^2 y_n \tfrac{t(t-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \nabla^n y_n \tfrac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} = \\ = {} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} t \\ k \end{array}\right) \nabla^k y_n \end{aligned}}$$

Diferencias Finitas

- Ejemplo: Calculamos la tabla respectivas de diferencias finitas progresivas y regresivas para los datos: $\{(-2, 3),(0, -1),(2, 3),(4, 5)\}$ y damos las respectivas expresiones del interpolante.
- Solución: Las diferencias finitas (progresivas y regresivas) son:

$\Delta^k y_0 \searrow$	$y_i = \Delta^0 y_i \downarrow$	$\Delta y_i \downarrow$	$\Delta^2 y_i \downarrow$	$\Delta^3 y_i \downarrow$
	$\boxed{3}$			
		$\boxed{-4}$		
	-1		$\boxed{8}$	
		4		$\boxed{-10}$
	3		$\boxed{-2}$	
		$\boxed{2}$		
	$\boxed{5}$			
$\nabla^k y_n \nearrow$	$\uparrow$ $y_i = \nabla^0 y_i$	$\uparrow$ ∇y_i	$\uparrow$ $\nabla^2 y_i$	$\uparrow$ $\nabla^3 y_i$

- Por lo tanto, los respectivos polinomios de interpolación son:
- **FORMA PROGRESIVA** (coeficientes en azul-morado)

$$\boxed{p(s) = 3 - 4s + 8\frac{s(s-1)}{2} - 10\frac{s(s-1)(s-2)}{6}}$$

donde $s = \frac{x+2}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_0 = -2$)

- **FORMA REGRESIVA** (coeficientes en rojo-morado):

$$\boxed{p(s) = 5 - 2t - 2\frac{t(t-1)}{2} + 10\frac{t(t-1)(t-2)}{6}}$$

donde $t = \frac{4-x}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_3 = 4$)

INTERPOLACIÓN DE HERMITE

- En determinadas aplicaciones se precisan métodos de interpolación que trabajen con datos prescritos de la función y sus derivadas en una serie de puntos, con el objeto de aumentar la aproximación en las proximidades de dichos puntos. Dentro de esta clase de métodos está la interpolación de Hermite.
- Sean $x_0,\ldots,x_n$ puntos distintos. Conocidos los valores de la función f y su derivada f' en $x_0,\ldots,x_n$, se trata de encontrar un polinomio de grado, el menor posible, que coincida con f y con su derivada en los puntos señalados.
- Se demuestra que dicho polinomio existe y es único. Además tiene grado 2n+1 (recuérdese que disponemos de 2n+2 datos para construirlo). A dicho polinomio se le llama polinomio de interpolación de Hermite de f en los puntos x_i, i = 0,.. , n.

INTERPOLACIÓN DE HERMITE

- Datos numéricos: f (x), f ' (xi), = 0,.., (2n+2 datos)
- Espacio de funciones interpoladoras: P_{2n+1}
- Problema interpolación polinomial de Hermite:
  - p $\in$ P_{2n+1} p(x 0) = f (x 0),..., p(xn) = f (xn)
- p'(x 0) = f ' (x 0),..., p'(xn) = f (xn)

- <u>Observación</u>: El problema de interpolación de Hermite se puede extender considerando valores de derivadas de la función de orden mayor que uno

INTERPOLACIÓN DE HERMITE

- Construcción del polinomio de Hermite usando diferencias divididas. Definamos puntos $z_0, \ldots, z_{2n+1}$ por medio de

$$z_{2j} = z_{2j+1} = x_j, \qquad i \in \{0, \ldots, n\}.$$

- y ponemos las condiciones

$$f[z_{2j}] = f[z_{2j+1}] = f(x_j), \quad f[z_{2j}, z_{2j+1}] = f'(z_{2j}) = f'(x_j).$$

- Las diferencias divididas restantes se producen como de costumbre, y las diferencias divididas apropiadas se emplean en la fórmula de diferencia dividida interpolar de Newton. El polinomio de Hermite está dado por:

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_{k-1}).$$

INTERPOLACIÓN DE HERMITE

- Diferencias divididas de Hermite

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

- **Ejemplo**: Utilice el polinomio de Hermite que concuerda con los datos de la tabla siguiente para encontrar una aproximación de f(1.5)

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	−0.5220232
1	1.6	0.4554022	−0.5698959
2	1.9	0.2818186	−0.5811571

- Diferencias divididas calculadas

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

- El valor del polinomio de Hermite en 1.5 es:

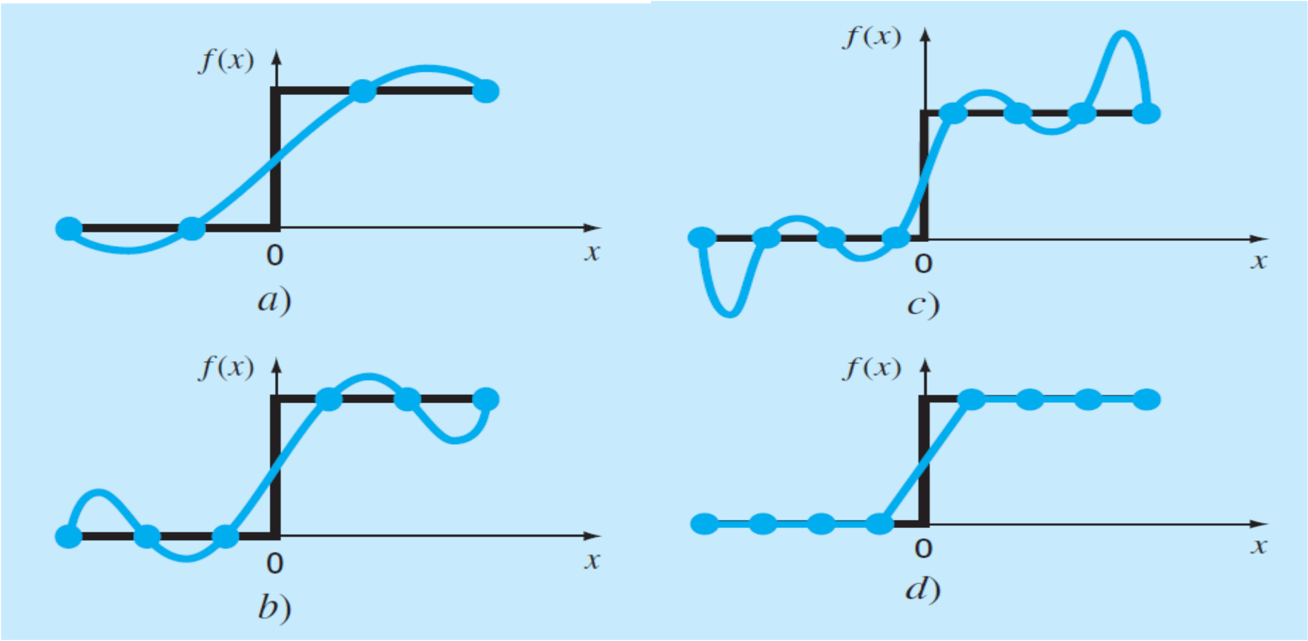
$$
\begin{aligned}
H_5(1.5) = {} & f[1.3] + f'(1.3)(1.5-1.3) + f[1.3, 1.3, 1.6](1.5-1.3)^2 \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6](1.5-1.3)^2(1.5-1.6) \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6, 1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2 \\
& + f[1.3, 1.3, 1.6, 1.6, 1.9, 1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9) \\
= {} & 0.6200860 + (-0.5220232)(0.2) + (-0.0897427)(0.2)^2 \\
& + 0.0663657(0.2)^2(-0.1) + 0.0026663(0.2)^2(-0.1)^2 \\
& + (-0.0027738)(0.2)^2(-0.1)^2(-0.4) \\
= {} & 0.5118277.
\end{aligned}
$$

INTERPOLACIÓN SPLINE

- La construcción de polinomios de interpolación de grado alto aunque justificable teóricamente plantea muchos problemas.
- Por un lado, la forma de la función polinómica de grado alto a menudo no responde al fenómeno debido al gran número de extremos e inflexiones.
- Por otro lado, su cálculo es muy complicado, lo que limita su utilidad en análisis numérico.
- Es a menudo más conveniente dividir el intervalo de interés en subintervalos más pequeños y usar en cada subintervalo polinomios de grado relativamente bajo, tratando de que la función a trozos definida de este modo tenga un aspecto final adecuado al fenómeno que estamos representando.

INTERPOLACIÓN SPLINE

- Por ejemplo, las curvas de tercer grado empleadas para unir cada par de datos se llaman *trazadores cúbicos*. Esas funciones se pueden construir de tal forma que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes resulten visualmente suaves

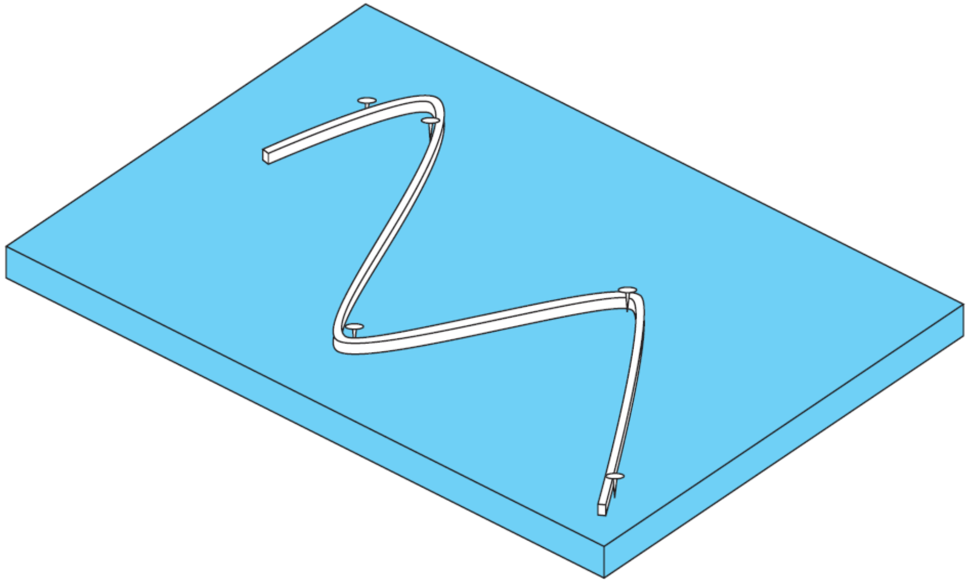


INTERPOLACIÓN SPLINE

- La figura anterior (*a* a *c*) ilustra cómo un polinomio de grado superior tiende a formar una curva de oscilaciones bruscas en la vecindad de un cambio súbito.
- En contraste, el trazador también une los puntos; pero como está limitado a cambios de tercer grado, las oscilaciones son mínimas.
- De esta manera, el trazador usualmente proporciona una mejor aproximación al comportamiento de las funciones que tienen cambios locales y abruptos
- El concepto de trazador se originó en la técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible (llamada *spline*, en inglés), para dibujar curvas suaves a través de un conjunto de puntos

INTERPOLACIÓN SPLINE

- Trazador con cinta y 5 puntos. La técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible para dibujar curvas suaves a través de una serie de puntos. Observe cómo en los puntos extremos, el trazador tiende a volverse recto. Esto se conoce como un trazador "natural".



Trazadores cúbicos

- El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Así, para $n + 1$ datos ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$), existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar

Trazadores cúbicos

- El trazador debe cumplir las siguientes condiciones
- Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n-2$ condiciones).
- La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
- Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
- Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).
- Total: $2n - 2 + 2 + n - 1 + n - 1 + 2 = 4n$

Trazadores cúbicos

- La interpretación visual de la condición 5 es que la función se vuelve una línea recta en los nodos extremos. La especificación de una condición tal en los extremos nos lleva a lo que se denomina trazador “natural”. Se le da tal nombre debido a que los trazadores para el dibujo naturalmente se comportan en esta forma.
- Los cinco tipos de condiciones anteriores proporcionan el total de las $4n$ ecuaciones requeridas para encontrar los $4n$ coeficientes.

Trazadores cúbicos

- **Ejercicio**: Interpolar los siguientes datos mediante una *spline* cúbica

X	Y
2	-1
3	2
5	-7

- Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & si \quad x \in [2,3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

Trazadores cúbicos

- A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$

$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

- Ahora calculamos la primera derivada de $s(x)$:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & si \quad x \in [2,3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

Trazadores cúbicos

- Se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso $x = 3$. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos $x = 3$ en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2 \Rightarrow 27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$

- Análogamente procedemos con la segunda derivada

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & si \quad x \in [2,3] \\ 6a_2x + 2b_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

- Para lograr que $s''(x)$ sea continua:

$$6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2 \Rightarrow 18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$

Trazadores cúbicos

- En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$s''(x_0) = 0$$
$$s''(x_n) = 0$$

- De lo cual vamos a obtener

$$s''(2) = 0 \Rightarrow 6a_1(2) + 2b_1 = 0 \qquad \therefore 12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$s''(5) = 0 \Rightarrow 6a_2(5) + 2b_2 = 0 \qquad \therefore 30a_2 + 2b_2 = 0$$

Trazadores cúbicos

- Con lo cual, hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1 \\
&27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2 \\
&27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2 \\
&125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7 \\
&27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2 \\
&18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2 \\
&12a_1 + 2b_1 = 0 \\
&30a_2 + 2b_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\
27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\
18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\
12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Trazadores cúbicos

- Obtenemos la siguiente solución:

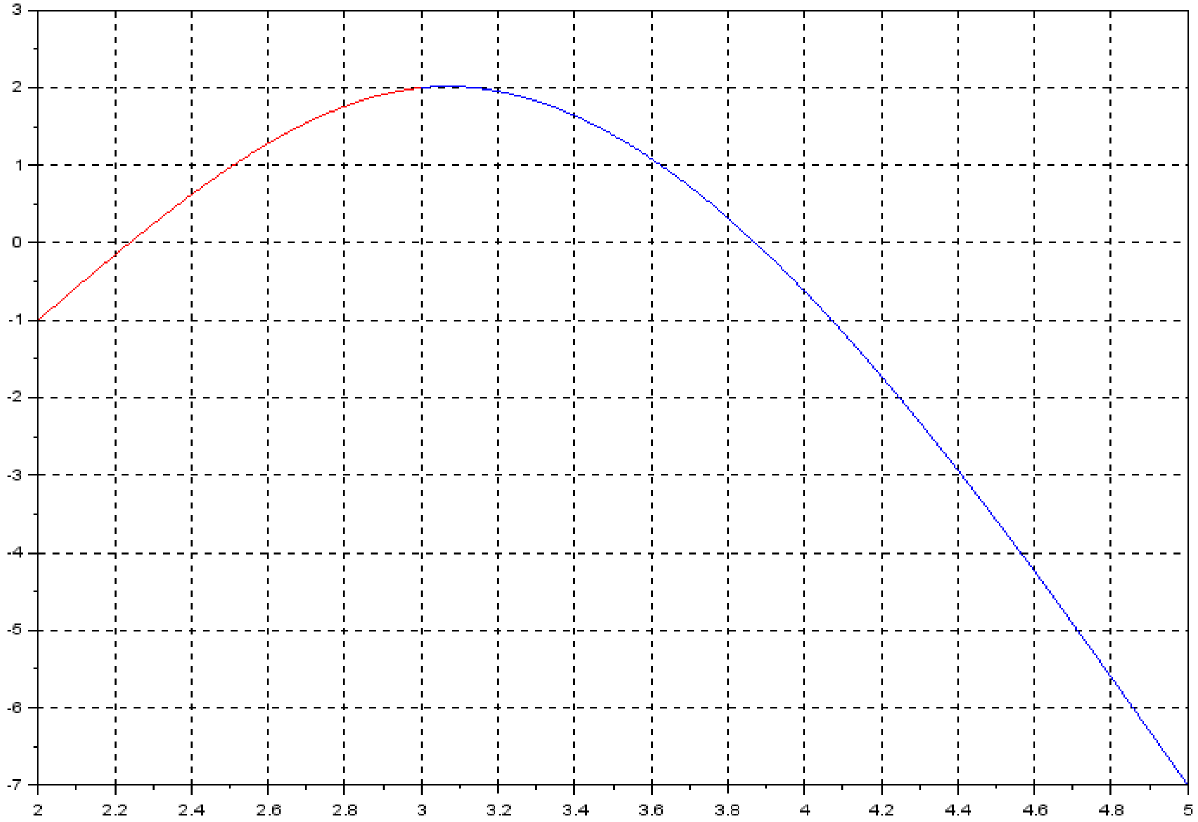
$$
\begin{aligned}
a_1 &= -1.25 & a_2 &= 0.625 \\
b_1 &= 7.5 & b_2 &= -9.375 \\
c_1 &= -10.75 & c_2 &= 39.875 \\
d_1 &= 0.5 & d_2 &= -50.125
\end{aligned}
$$

- Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la *spline* cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$
s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & si \quad x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}
$$

Trazadores cúbicos

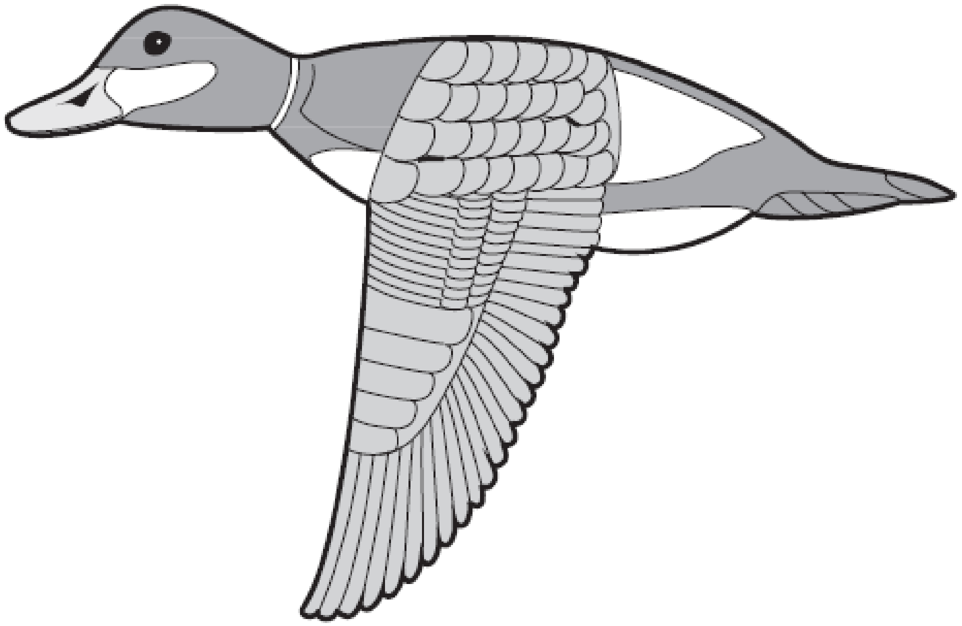
- Mostramos la gráfica correspondiente a este ejercicio



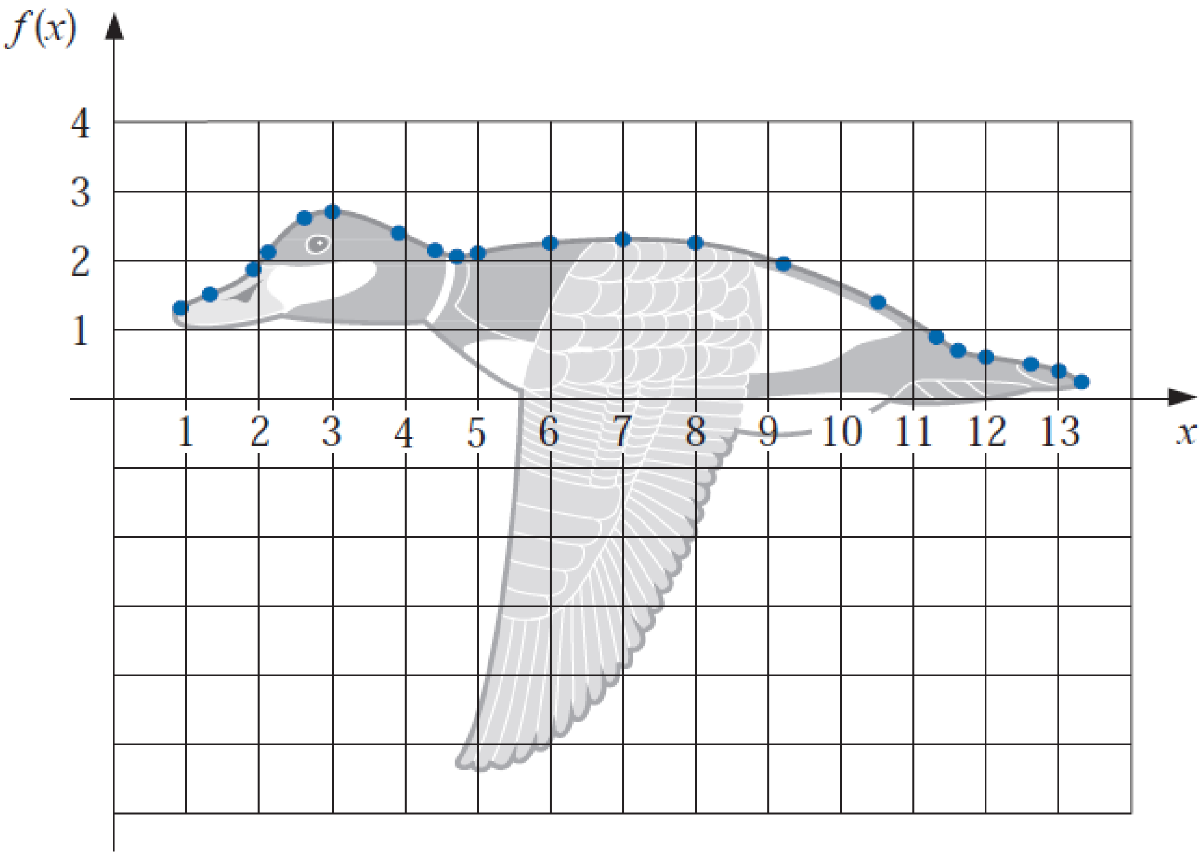
Trazadores cúbicos

x	f(x)
0.9	1.3
1.3	1.5
1.9	1.85
2.1	2.1
2.6	2.6
3.0	2.7
3.9	2.4
4.4	2.15
4.7	2.05
5.0	2.1
6.0	2.25
7.0	2.3
8.0	2.25
9.2	1.95
10.5	1.4
11.3	0.9
11.6	0.7
12.0	0.6
12.6	0.5
13.0	0.4
13.3	0.25

- Crear un interpolador spline cúbico para los datos de la siguiente tabla
- Estos datos representan los puntos de la silueta de un pato:



Trazadores cúbicos



j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0.9	1.3	5.40	0.00	−0.25
1	1.3	1.5	0.42	−0.30	0.95
2	1.9	1.85	1.09	1.41	−2.96
3	2.1	2.1	1.29	−0.37	−0.45
4	2.6	2.6	0.59	−1.04	0.45
5	3.0	2.7	−0.02	−0.50	0.17
6	3.9	2.4	−0.50	−0.03	0.08
7	4.4	2.15	−0.48	0.08	1.31
8	4.7	2.05	−0.07	1.27	−1.58
9	5.0	2.1	0.26	−0.16	0.04
10	6.0	2.25	0.08	−0.03	0.00
11	7.0	2.3	0.01	−0.04	−0.02
12	8.0	2.25	−0.14	−0.11	0.02
13	9.2	1.95	−0.34	−0.05	−0.01
14	10.5	1.4	−0.53	−0.10	−0.02
15	11.3	0.9	−0.73	−0.15	1.21
16	11.6	0.7	−0.49	0.94	−0.84
17	12.0	0.6	−0.14	−0.06	0.04
18	12.6	0.5	−0.18	0.00	−0.45
19	13.0	0.4	−0.39	−0.54	0.60
20	13.3	0.25			

Trazadores cúbicos