Interpolación y Aproximación

PARTE 2

UNJU – Facultad de Ingeniería

CÁLCULO NUMÉRICO 2018

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE NEWTON EN DIFERENCIAS DIVIDIDAS

El análisis anterior (interpolación lineal, cuadrática) puede generalizarse para ajustar un polinomio de *n*-ésimo grado a *n*+1 datos. El polinomio de *n*-ésimo grado es:

$Pn(x) = b0 + b1(x - x0) + \cdots + bn(x - x0)(x - x1)\cdots(x - xn-1)$ (1)

Como se hizo antes con las interpolaciones lineales y cuadráticas, los puntos asociados con datos se utilizan para evaluar los coeficientes $b0$, $b1$,..., bn. Para un polinomio de *n*-ésimo grado se requieren $n + 1$ puntos: [$x0$, $f(x0)$], [$x1$, $f(x1)$],..., [xn, $f(xn)$]. Usamos estos datos y las siguientes ecuaciones para evaluar los coeficientes:

$b0 = f(x0)$ (2)
$b1 = f[x0, x1]$ (3)
$b2 = f[x0, x1, x2]$ (4)
.
.
.
$bn = f[x0, x1, \cdots, xn-1, xn]$ (5)

donde las evaluaciones de la función colocadas entre paréntesis son diferencias divididas.

Introducimos lo que se conoce como notación de diferencia dividida. Diferencias divididas de orden cero de la función *f*,

$$f[x_0] = f(x_0),\ f[x_1] = f(x_1), \cdots,\ f[x_n] = f(x_n) \qquad (6)$$

Por ejemplo, la primera diferencia dividida en forma general se representa como

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0},\ f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}, \ldots,\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad (7)$$

La *segunda diferencia dividida*, que representa la diferencia de las dos primeras diferencias divididas, se expresa en forma general como

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},\ f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}, \ldots \qquad (8)$$

En forma similar, la *n-ésima diferencia dividida* es

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (9)$$

Estas diferencias sirven para evaluar los coeficientes en las ecuaciones (2) a
(5), los cuales se sustituirán en la ecuación (18.7) para obtener el polinomio de interpolación

$$Pn(x) = f(x0) + (x - x0)\, f[x0, x1] + (x - x0)(x - x1)\, f[x0, x1, x2]$$
$$+ \cdot\cdot\cdot + (x - x0)(x - x1)\cdot\cdot\cdot(x - xn{-}1)\, f[x0, x1, \cdot\cdot\cdot xn{-}1, xn] \quad (10)$$

que se conoce como *polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas*. Que toma la forma reducida:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) \quad (11)$$

Debe observarse que no se requiere que los datos utilizados en la ecuación (10) estén igualmente espaciados o que los valores de la abscisa estén en orden ascendente. También, advierta cómo las ecuaciones (6) a (9) son recursivas (es decir, las diferencias de orden superior se calculan tomando diferencias de orden inferior (Figura 1). Tal propiedad se aprovechará cuando sea necesario agregar nuevos puntos de datos, esta propiedad no la posee el desarrollo del polinomio interpolador de Lagrange.

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$			

Figura 1: Tabla de Diferencias divididas

Ejemplo: dados los valores de la Tabla 1, construya un polinomio interpolador de Newton en diferencias divididas para calcular P(1.5)

Tabla 1: Valores ejercicio N° 1

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3},\dots, x_i]$	$f[x_{i-4},\dots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$$P_4(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{4} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$$

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) + 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)$$
$$+0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$

y, $P_4(1.5) = 0.5118200$

Diferencias Finitas: Fórmulas de Newton Progresiva y Regresiva.

Nos preguntamos, ahora, ¿cómo puede expresarse el polinomio de interpolación para datos Lagrangianos; es decir, p (x_i) = f (x_i) = y_i cuando los nodos están igualmente espaciados?

Supongamos que los nodos son de la forma: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ con $x_i = a+ih$, $i = 0, \dots, n$ y $h = (b-a)/n$; entonces, podemos relacionar las diferencias divididas de f(x) con las llamadas Diferencias Finitas (D.F.) de f(x). Pero, ¿cómo se definen?

Llamamos **D.F. progresiva** de f de orden k >= 0 en un punto x, al valor:

$$\Delta^k f(x) = \begin{cases} f(x) & \texttt{si} \quad k=0 \\ f(x+h) - f(x) & \texttt{si} \quad k=1 \\ \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right) & \texttt{si} \quad k>1 \end{cases}$$

Si usamos como punto un nodo de interpolación, entonces las D.F. progresivas serán

$$\Delta^0 y_i = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$$
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0, \ldots, n-1$$
$$\Delta^k y_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_i\right), i = 0, \ldots, n-k$$

De forma similar pueden definirse las **D.F. regresivas** para f o datos; a saber

Llamamos D.F. regresiva de f de orden k >= 0 en un punto x, al valor:

$$\nabla^0 f(x) = f(x)$$
$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$
$$\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1} f(x)\right)$$

O bien:

$$\nabla^0 y_i = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$$
$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, \ldots, n$$
$$\nabla^k y_i = \nabla\left(\nabla^{k-1} y_i\right), i = k, \ldots, n$$

Ahora, con esta nomenclatura, es fácil comprobar la propiedad siguiente:
Propiedad: Dada f evaluada en nodos igualmente espaciados, $x_i = a + ih$, i = 0, . . . n , entonces:

1. $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k},\ k = 0, \ldots, n$ *(D.D. ascendentes mediante D.F. progresivas)*

2. $f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k y_n}{k!h^k},\ k = 0, \ldots, n$ *(D.D. descendentes mediante D.F. regresivas).*

Por lo tanto, desde las dos propiedades anteriores, el polinomio de interpolación en la forma de Newton admite las representaciones que especificamos a continuación.

Fórmula de Newton Progresiva

Esta la obtenemos usando la fórmula de Newton clásica para el interpolante de Lagrange; es decir,

$$P_N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Esta expresión quedaría reducida a la siguiente:

$$P_N(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

pero si realizamos el cambio de variable:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow \frac{x - x_i}{h} = \frac{x - (x_0 + ih)}{h} = s - i$$

entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} P_N(s) = &\ \Delta^0 y_0 + \Delta y_0 s + \Delta^2 y_0 \tfrac{s(s-1)}{2!} + \cdots + \Delta^n y_0 \tfrac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} = \\ = &\ \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0 \end{aligned}}$$

Fórmula de Newton Regresiva

Si, en el método de interpolación de Newton, usamos un proceso descendente; es decir, desde el nodo x_n hasta el nodo x_0 tendríamos la Fórmula de Newton siguiente:

$$P_N(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

y, desde aquí, de forma similar pero con las diferencias regresivas llegamos a la expresión:

$$P_N(x) = \nabla^0 y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

Como antes, si hacemos el cambio:

$$t = \frac{x_n - x}{h} \Rightarrow \frac{x_{n-i} - x}{h} = \frac{(x_n - ih) - x}{h} = t - i$$

tenemos la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) = &\ \nabla^0 y_n - \nabla y_n t + \nabla^2 y_n \tfrac{t(t-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \nabla^n y_n \tfrac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} = \\ = &\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{t}{k} \nabla^k y_n \end{aligned}}$$

Observación: En las expresiones anteriores se ha utilizado el combinatorio formal:

$$\binom{w}{k} = \tfrac{w(w-1)\cdots(w-k+1)}{k!} \text{ con } w = s \text{ ó } w = t.$$

Ejemplo: Calculamos la tabla respectivas de diferencias finitas progresivas y regresivas para los datos: {(−2, 3),(0, −1),(2, 3),(4, 5)} y damos las respectivas expresiones del interpolante.

Solución: Las diferencias finitas (progresivas y regresivas) son:

$\Delta^k y_0$ $\searrow$	$\mathrm{y_i} = \Delta^0 y_i$ $\downarrow$	Δy_i $\downarrow$	$\Delta^2 y_i$ $\downarrow$	$\Delta^3 y_i$ $\downarrow$
	$\boxed{3}$			
		$\boxed{-4}$		
	-1		$\boxed{8}$	
		4		$\boxed{-10}$
	3		$\boxed{-2}$	
		$\boxed{2}$		
	$\boxed{5}$			
$\nabla^k y_n$ $\nearrow$	$\uparrow$ $\mathrm{y_i} = \nabla^0 y_i$	$\uparrow$ ∇y_i	$\uparrow$ $\nabla^2 y_i$	$\uparrow$ $\nabla^3 y_i$

Por lo tanto, los respectivos polinomios de interpolación son:

FORMA PROGRESIVA (coeficientes en azul-morado):

$$\boxed{p(s) = 3 - 4s + 8\frac{s(s-1)}{2} - 10\frac{s(s-1)(s-2)}{6}}$$

donde $s = \frac{x+2}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_0 = -2$)

FORMA REGRESIVA (coeficientes en rojo-morado):

$$\boxed{p(s) = 5 - 2t - 2\frac{t(t-1)}{2} + 10\frac{t(t-1)(t-2)}{6}}$$

donde $t = \frac{4-x}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_3 = 4$)

INTERPOLACIÓN DE HERMITE

En determinadas aplicaciones se precisan métodos de interpolación que trabajen con datos prescritos de la función y sus derivadas en una serie de puntos, con el objeto de aumentar la aproximación en las proximidades de dichos puntos. Dentro de esta clase de métodos está la interpolación de Hermite. Nos centramos en el problema de interpolación polinomial de Hermite.

Sean $x_0,\ldots,x_n$ puntos distintos. Conocidos los valores de la función f y su derivada f' en $x_0,\ldots,x_n$, se trata de encontrar un polinomio de grado, el menor posible, que coincida con f y con su derivada en los puntos señalados.

Se demuestra que dicho polinomio existe y es único. Además tiene grado 2n+1 (recuérdese que disponemos de 2n+2 datos para construirlo). A dicho polinomio se le llama polinomio de interpolación de Hermite de f en los puntos x_i, i = 0,.. , n.

- Datos numéricos: $f(x)$, $f'(xi)$, = 0,.., (2n+2 datos)
- Espacio de funciones interpoladoras: P_{2n+1}
- Problema interpolación polinomial de Hermite:
  - $p \in P_{2n+1}$ $\quad p(x_0)=f(x_0),\ldots,p(x_n)=f(x_n)$
    $p'(x_0)=f'(x_0),\ldots,p'(x_n)=f(x_n)$

Observación: El problema de interpolación de Hermite se puede extender considerando valores de derivadas de la función de orden mayor que uno

Un algoritmo análogo al de Newton nos proporcionará un método alternativo a la fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación de Hermite. Para ello, previamente tenemos que extender el concepto de diferencias divididas al caso en el que los argumentos se repitan.

Construcción del polinomio de Hermite usando diferencias divididas. Definamos puntos $z_0, \ldots,$ z_{2n+1} por medio de

$$z_{2j} = z_{2j+1} = x_j, \qquad i \in \{0, \ldots, n\}.$$

y ponemos las condiciones

$$f[z_{2j}] = f[z_{2j+1}] = f(x_j), \quad f[z_{2j}, z_{2j+1}] = f'(z_{2j}) = f'(x_j).$$

Las diferencias divididas restantes se producen como de costumbre, y las diferencias divididas apropiadas se emplean en la fórmula de diferencia dividida interpolar de Newton. La Tabla 1 muestra las entradas que se usan para las primeras tres columnas de diferencia dividida al determinar el polinomio de Hermite $H_5(x)$ para x_0, x_1 y x_2. El polinomio de Hermite es dado por:

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_{k-1}).$$

Tabla 1: Diferencias divididas de Hermite

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Ejemplo: Utilice el polinomio de Hermite que concuerda con los datos de la tabla siguiente para encontrar una aproximación de f(1.5)

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	−0.5220232
1	1.6	0.4554022	−0.5698959
2	1.9	0.2818186	−0.5811571

Diferencias divididas calculadas:

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

El valor del polinomio de Hermite en 1.5 es:

$$
\begin{aligned}
H_5(1.5) = {} & f[1.3] + f'(1.3)(1.5-1.3) + f[1.3,1.3,1.6](1.5-1.3)^2 \\
& + f[1.3,1.3,1.6,1.6](1.5-1.3)^2(1.5-1.6) \\
& + f[1.3,1.3,1.6,1.6,1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2 \\
& + f[1.3,1.3,1.6,1.6,1.9,1.9](1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9) \\
= {} & 0.6200860 + (-0.5220232)(0.2) + (-0.0897427)(0.2)^2 \\
& + 0.0663657(0.2)^2(-0.1) + 0.0026663(0.2)^2(-0.1)^2 \\
& + (-0.0027738)(0.2)^2(-0.1)^2(-0.4) \\
= {} & 0.5118277.
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Construyamos el polinomio de Hermite que concuerde con f y f' en los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, si

$$f(-1) = -9, \quad f'(-1) = 10, \qquad f(2) = 12, \quad f'(2) = 13.$$

Tabla de diferencias divididas (los datos iniciales están escritos con azul):

$$\begin{array}{lllll}
z_0 = -1 & f[z_0] = -9 & & & \\
z_1 = -1 & f[z_1] = -9 & f[z_0, z_1] = 10 & & \\
z_2 = 2 & f[z_2] = 12 & f[z_1, z_2] = 7 & f[z_0, z_1, z_2] = -1 & \\
z_3 = 2 & f[z_3] = 12 & f[z_2, z_3] = 13 & f[z_1, z_2, z_3] = 2 & f[z_0, z_1, z_2, z_3] = 1
\end{array}$$

Respuesta: $H(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$.

INTERPOLACIÓN SPLINE

La construcción de polinomios de interpolación de grado alto aunque justificable teóricamente plantea muchos problemas. Por un lado, la forma de la función polinómica de grado alto a menudo no responde al fenómeno debido al gran número de extremos e inflexiones. Por otro lado, su cálculo es muy complicado, lo que limita su utilidad en análisis numérico. Es a menudo más conveniente dividir el intervalo de interés en subintervalos más pequeños y usar en cada subintervalo polinomios de grado relativamente bajo, tratando de que la función a trozos definida de este modo tenga un aspecto final adecuado al fenómeno que estamos representando.

En la sección anterior, se usaron polinomios de *n*-ésimo grado para interpolar entre *n* + 1 puntos que se tenían como datos. Por ejemplo, para ocho puntos se puede obtener un perfecto polinomio de séptimo grado. Esta curva podría agrupar todas las curvas (al menos hasta, e incluso, la séptima derivada) sugeridas por los puntos. No obstante, hay casos donde estas funciones llevarían a resultados erróneos a causa de los errores de redondeo y los puntos lejanos. Un procedimiento alternativo consiste en colocar polinomios de grado inferior en subconjuntos de los datos. Tales polinomios conectores se denominan *trazadores* o *splines*.

Por ejemplo, las curvas de tercer grado empleadas para unir cada par de datos se llaman *trazadores cúbicos*. Esas funciones se pueden construir de tal forma que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes resulten visualmente suaves. Podría parecer que la aproximación de tercer grado de los trazadores sería inferior a la expresión de séptimo grado. Usted se preguntaría por qué un trazador aún resulta preferible.

La Figura 2 ilustra una situación donde un trazador se comporta mejor que un polinomio de grado superior. Éste es el caso donde una función en general es suave, pero presenta un cambio abrupto en algún lugar de la región de interés. El tamaño de paso representado en la Figura 2 es un ejemplo extremo de tal cambio y sirve para ilustrar esta idea.

La Figura 2*a* a *c* ilustra cómo un polinomio de grado superior tiende a formar una curva de oscilaciones bruscas en la vecindad de un cambio súbito. En contraste, el trazador también une los puntos; pero como está limitado a cambios de tercer grado, las oscilaciones son mínimas. De esta manera, el trazador usualmente proporciona una mejor aproximación al comportamiento de las funciones que tienen cambios locales y abruptos.

El concepto de trazador se originó en la técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible (llamada *spline*, en inglés), para dibujar curvas suaves a través de un conjunto de puntos. El proceso se representa en la Figura 3 para una serie de cinco alfileres (datos). En esta técnica, el dibujante coloca un papel sobre una mesa de madera y coloca alfileres o clavos en el papel (y la mesa) en la ubicación de los datos. Una curva cúbica suave resulta al entrelazar la cinta entre los alfileres. De aquí que se haya adoptado el nombre de “trazador cúbico” (en inglés: “cubic spline”) para los polinomios de este tipo.

En esta sección, se usarán primero funciones lineales simples para presentar algunos conceptos y problemas básicos relacionados con la interpolación mediante splines.
A continuación obtendremos un algoritmo para el ajuste de trazadores cuadráticos a los datos. Por último, presentamos material sobre el trazador cúbico, que es la versión más común y útil en la práctica de la ingeniería.

Figura 2: Una representación visual de una situación en la que los trazadores son mejores que los polinomios de interpolación de grado superior. La función que se ajusta presenta un incremento súbito en x = 0. Los incisos a) a c) indican que el cambio abrupto induce oscilaciones en los polinomios de interpolación. En contraste, como se limitan a curvas de tercer grado con transiciones suaves, un trazador lineal d) ofrece una aproximación mucho más aceptable.

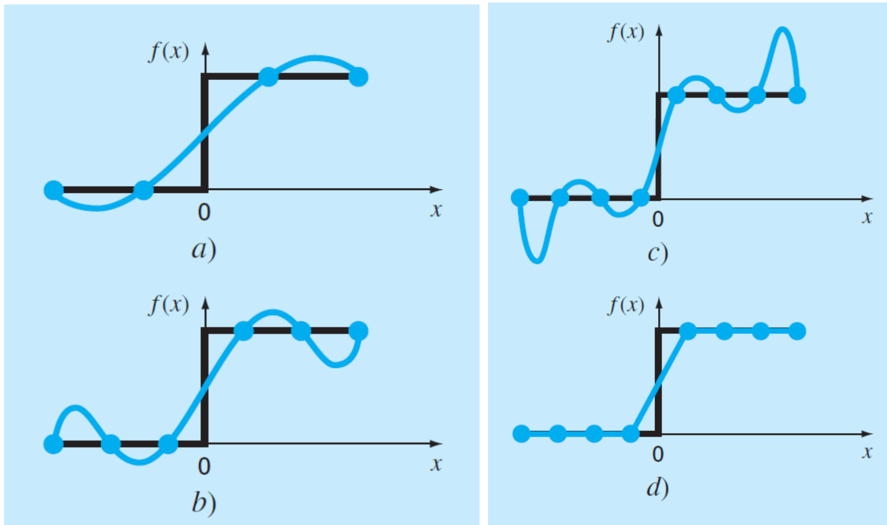
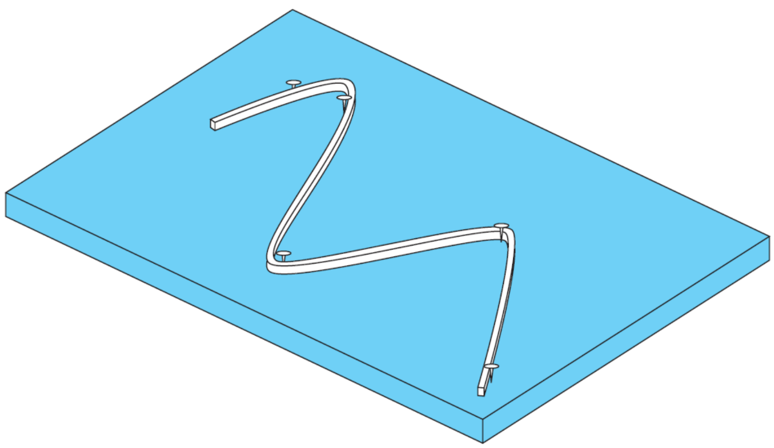


Figura 3: Trazador con cinta y 5 puntos. La técnica de dibujo que usa una cinta delgada y flexible para dibujar curvas suaves a través de una serie de puntos. Observe cómo en los puntos extremos, el trazador tiende a volverse recto. Esto se conoce como un trazador "natural".



Trazadores lineales

La unión más simple entre dos puntos es una línea recta. Los trazadores de primer grado para un grupo de datos ordenados pueden definirse como un conjunto de funciones lineales,

$f(x) = f(x0) + m0(x - x0) \; x0 < x < x1$
$f(x) = f(x1) + m1(x - x1) \; x1 < x < x2$

.
.
.

$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \quad x_{n-1} < x < x_n$

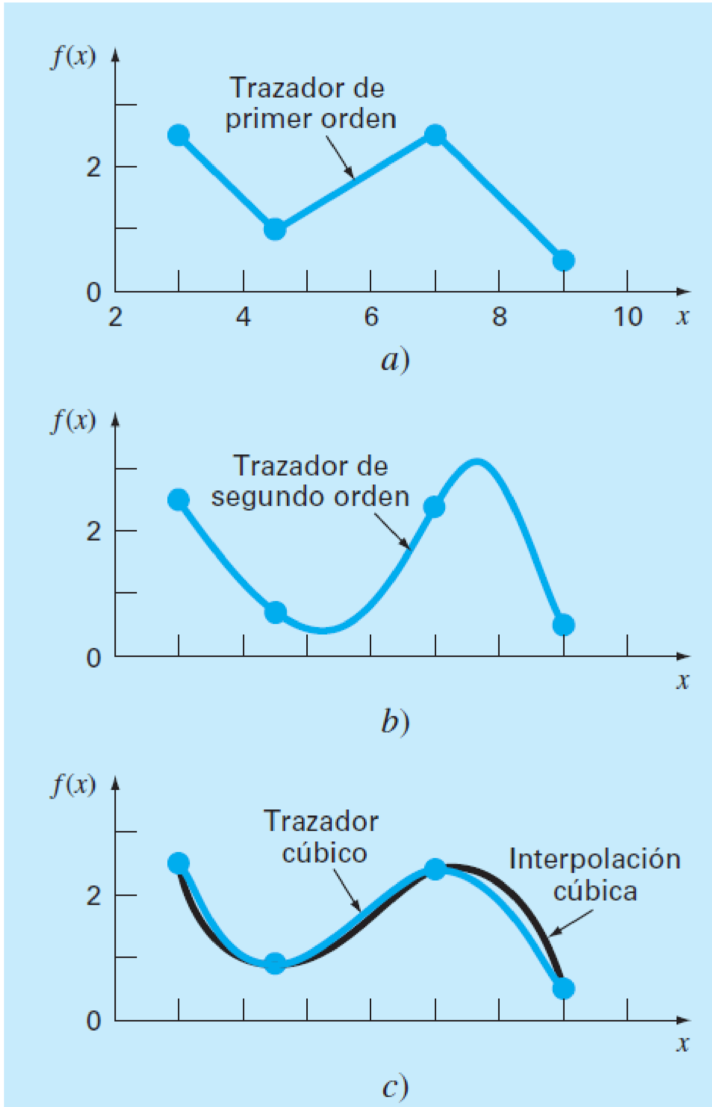
donde m_i es la pendiente de la línea recta que une los puntos:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Estas ecuaciones se pueden usar para evaluar la función en cualquier punto entre x_0 y x_n localizando primero el intervalo dentro del cual está el punto. Después se usa la ecuación adecuada para determinar el valor de la función dentro del intervalo. El método es obviamente idéntico al de la interpolación lineal

Una inspección visual a la Figura 4*a* indica que la principal desventaja de los trazadores de primer grado es que no son suaves. En esencia, en los puntos donde se encuentran dos trazadores (llamado *nodo*), la pendiente cambia de forma abrupta. Formalmente, la primer derivada de la función es discontinua en esos puntos. Esta deficiencia se resuelve usando trazadores polinomiales de grado superior, que aseguren suavidad en los nodos al igualar las derivadas en esos puntos, como se analiza en la siguiente sección.

Figura 4: Ajuste mediante trazadores de un conjunto de cuatro puntos. a) Trazador lineal, b) Trazador cuadrático y c) trazador cúbico; se grafica también un polinomio de interpolación cúbico.



Trazadores (splines) cuadráticos

Para asegurar que las derivadas *m*-ésimas sean continuas en los nodos, se debe emplear un trazador de un grado de, al menos, *m* + 1. En la práctica se usan con más frecuencia polinomios de tercer grado o trazadores cúbicos que aseguran primera y segunda derivadas continuas. Aunque las derivadas de tercer orden y mayores podrían ser discontinuas cuando se usan trazadores cúbicos, por lo común no pueden detectarse en forma visual y, en consecuencia, se ignoran.

Debido a que la deducción de trazadores cúbicos es algo complicada, la hemos incluido en una sección subsecuente. Decidimos ilustrar primero el concepto de interpolación mediante trazadores usando polinomios de segundo grado. Esos “trazadores cuadráticos” tienen primeras derivadas continuas en los nodos. Aunque los trazadores cuadráticos no aseguran segundas derivadas iguales en los nodos, sirven muy bien para demostrar el procedimiento general en el desarrollo de trazadores de grado superior.

El objetivo de los trazadores cuadráticos es obtener un polinomio de segundo grado para cada intervalo entre los datos. De manera general, el polinomio en cada intervalo se representa como

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

La figura Figura 5 servirá para aclarar la notación. Para $n + 1$ datos ($i = 0, 1, 2,..., n$) existen n intervalos y, en consecuencia, $3n$ constantes desconocidas (las a, b y c) por evaluar. Por lo tanto, se requieren $3n$ ecuaciones o condiciones para evaluar las incógnitas. Éstas son:

1. *Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.* Esta condición se representa como:

   $$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
   $$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

   para $i = 2$ a n. Como sólo se emplean nodos interiores, las ecuaciones anteriores proporcionan, cada una, $n – 1$ condiciones; en total, $2n – 2$ condiciones.

2. *La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos*. Esto agrega dos ecuaciones más:

   $$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
   $$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

   en total tenemos $2n – 2 + 2 = 2n$ condiciones

3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. La primera derivada de la ecuación

   $$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

   es:

   $$f'(x) = 2ax + b$$

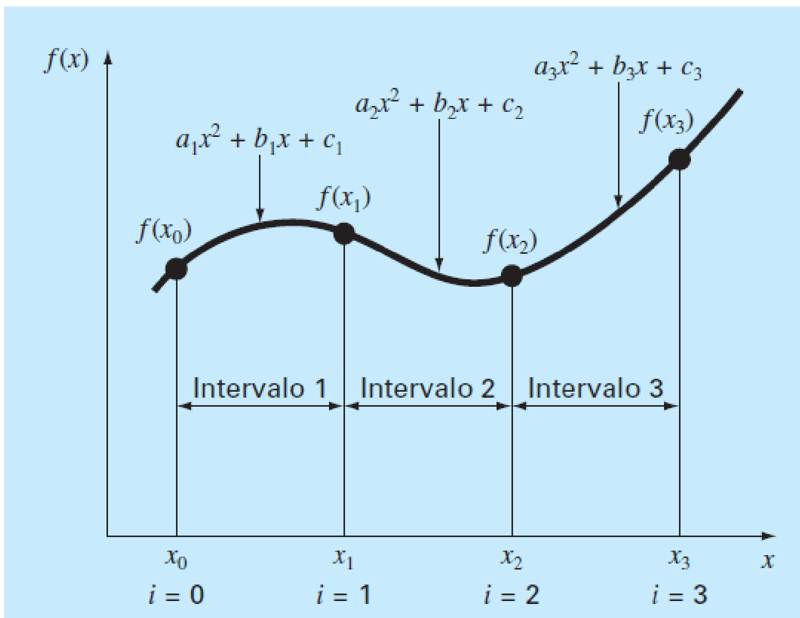
   Por lo tanto, de manera general la condición se representa como

   $$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i$$

para $i = 2$ a n. Esto proporciona otras $n - 1$ condiciones, llegando a un total de $2n + n - 1 = 3n - 1$. Como se tienen $3n$ incógnitas, nos falta una condición más. A menos que tengamos alguna información adicional respecto de las funciones o sus derivadas, tenemos que realizar una elección arbitraria para calcular las constantes. Aunque hay varias opciones, elegimos la siguiente:

4. Suponga que en el primer punto la segunda derivada es cero. Como la segunda derivada de la primer ecuación es $2a_i$, entonces esta condición se puede expresar matemáticamente como
$a_1 = 0$
La interpretación visual de esta condición es que los dos primeros puntos se unirán con una línea recta.

Figura 5: Notación utilizada para obtener trazadores cuadráticos. Observe que hay n intervalos y n + 1 datos. El ejemplo mostrado es para n = 3.



Trazadores cúbicos

El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos

$$f_i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i$$

Así, para $n + 1$ datos ($i = 0, 1, 2,..., n$), existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar. Como con los trazadores cuadráticos, se requieren $4n$ condiciones para evaluar las incógnitas. Éstas son:

1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n – 2$ condiciones).
2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n – 1$ condiciones).
4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n – 1$ condiciones).
5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).

La interpretación visual de la condición 5 es que la función se vuelve una línea recta en los nodos extremos. La especificación de una condición tal en los extremos nos lleva a lo que se denomina trazador “natural”. Se le da tal nombre debido a que los trazadores para el dibujo naturalmente se comportan en esta forma (Figura 3). Si el valor de la segunda derivada en los nodos extremos no es cero (es decir, existe alguna curvatura), es posible utilizar esta información de manera alternativa para tener las dos condiciones finales.

Los cinco tipos de condiciones anteriores proporcionan el total de las $4n$ ecuaciones requeridas para encontrar los $4n$ coeficientes.

Ejercicio: Interpolar los siguientes datos mediante una *spline* cúbica

X	Y
2	-1
3	2
5	-7

Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & si \quad x \in [2,3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$

$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

Ahora calculamos la primera derivada de $s(x)$:

$$s'(x)=\begin{cases} 3a_1x^2+2b_1x+c_1 & si \quad x\in[2,3] \\ 3a_2x^2+2b_2x+c_2 & si \quad x\in[3,5] \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las *splines* cuadráticas, se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso $x = 3$. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos $x = 3$ en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2+2b_1(3)+c_1=3a_2(3)^2+2b_2(3)+c_2 \Rightarrow 27a_1+6b_1+c_1=27a_2+6b_2+c_2$$

Análogamente procedemos con la segunda derivada

$$s''(x)=\begin{cases} 6a_1x+2b_1 & si \quad x\in[2,3] \\ 6a_2x+2b_2 & si \quad x\in[3,5] \end{cases}$$

Para lograr que $s''(x)$ sea continua:

$$6a_1(3)+2b_1=6a_2(3)+2b_2 \Rightarrow 18a_1+2b_1=18a_2+2b_2$$

En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$s''(x_0)=0$$
$$s''(x_n)=0$$

De lo cual vamos a obtener:

$$s''(2)=0 \Rightarrow 6a_1(2)+2b_1=0 \qquad \therefore 12a_1+2b_1=0$$
$$s''(5)=0 \Rightarrow 6a_2(5)+2b_2=0 \qquad \therefore 30a_2+2b_2=0$$

Con lo cual, hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$
$$27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$
$$27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2$$
$$125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$
$$27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$
$$18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$
$$12a_1 + 2b_1 = 0$$
$$30a_2 + 2b_2 = 0$$

Cuya forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

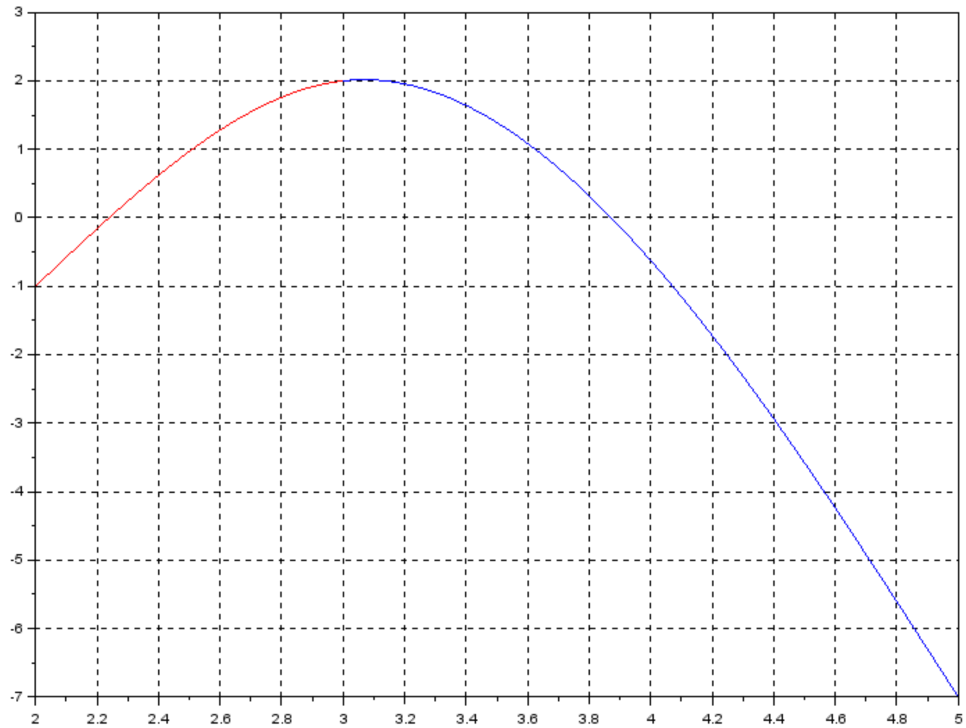
Obtenemos la siguiente solución:

$$\begin{array}{ll} a_1 = -1.25 & a_2 = 0.625 \\ b_1 = 7.5 & b_2 = -9.375 \\ c_1 = -10.75 & c_2 = 39.875 \\ d_1 = 0.5 & d_2 = -50.125 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la *spline* cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & si \quad x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

Mostramos la gráfica correspondiente a este ejercicio



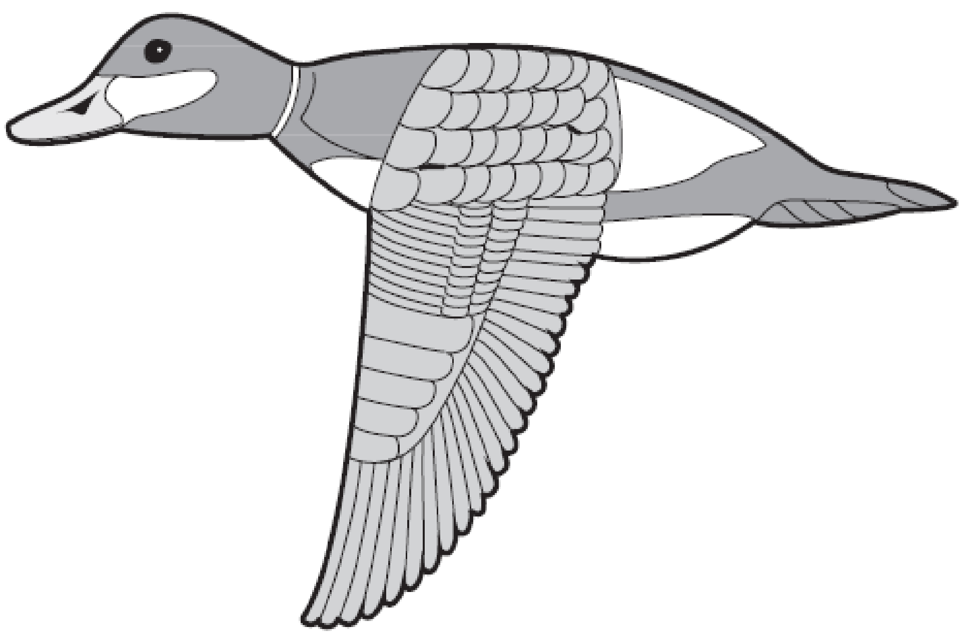
Prácticamente ni se nota que se trata de dos polinomios diferentes. Esto es debido a las condiciones que se impusieron sobre las derivadas de la función. Esta finura casi artística, es la que permite aplicar las splines cúbicas, para cuestiones como el diseño de letras por computadoras, o bien a problemas de aplicación donde la interpolación que se necesita es de un carácter bastante delicado, como podría tratarse de datos médicos sobre algún tipo de enfermedad.

Ejercicio 2: Crear un interpolador spline cúbico para los datos de la siguiente tabla

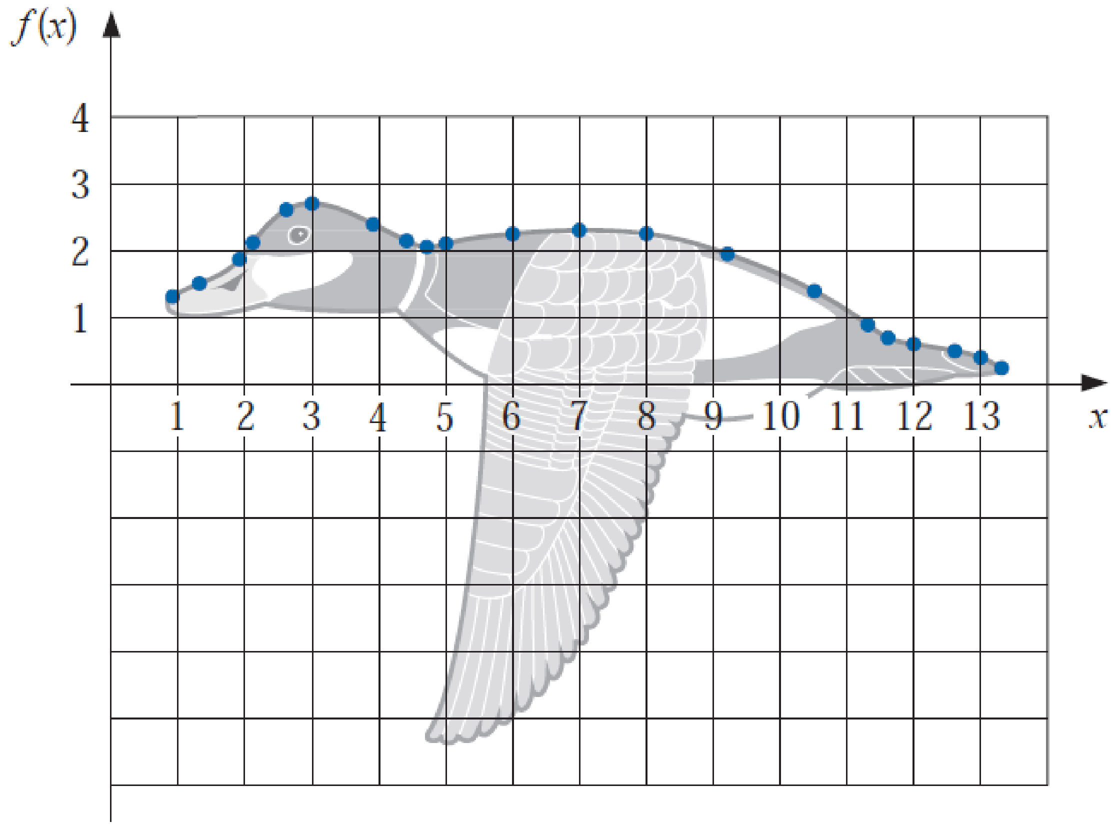
x	f(x)
0.9	1.3
1.3	1.5
1.9	1.85
2.1	2.1
2.6	2.6
3.0	2.7
3.9	2.4

4.4	2.15
4.7	2.05
5.0	2.1
6.0	2.25
7.0	2.3
8.0	2.25
9.2	1.95
10.5	1.4
11.3	0.9
11.6	0.7
12.0	0.6
12.6	0.5
13.0	0.4
13.3	0.25

Estos datos representan los puntos de la silueta de un pato:



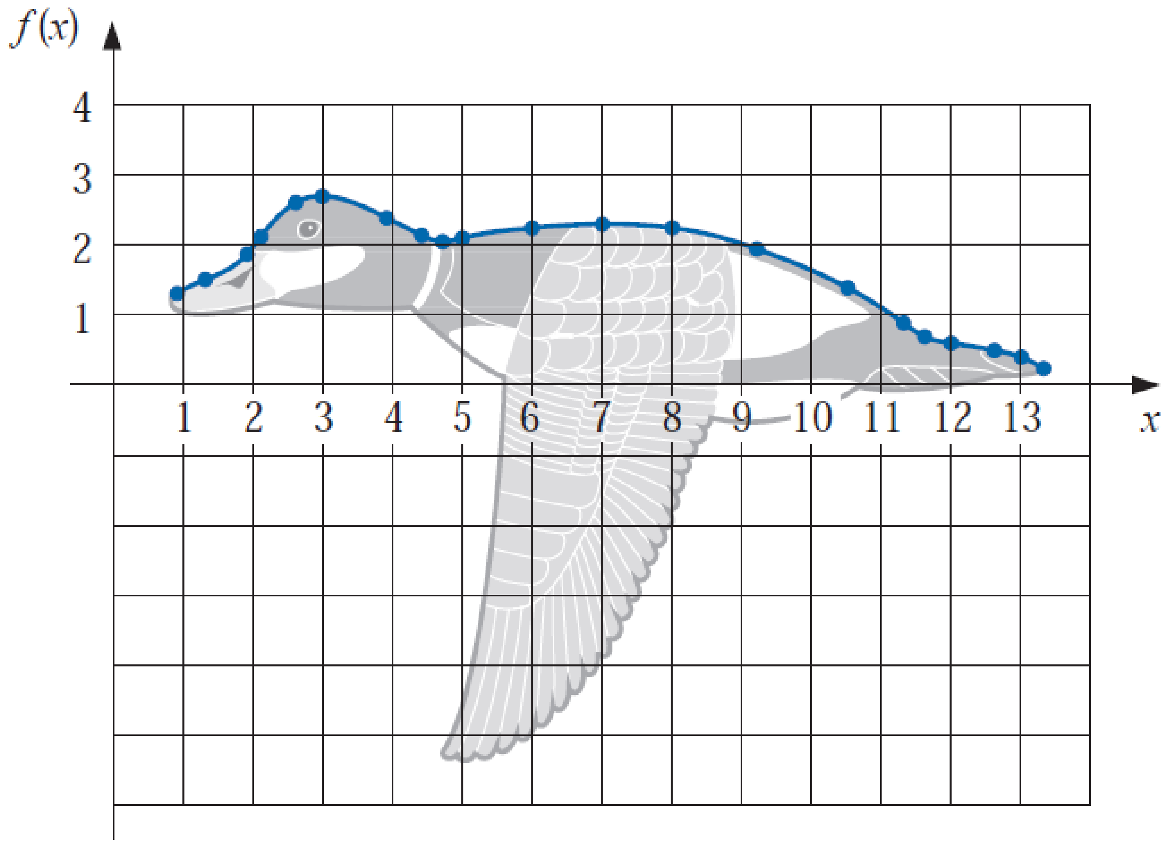
En el eje de coordenadas:



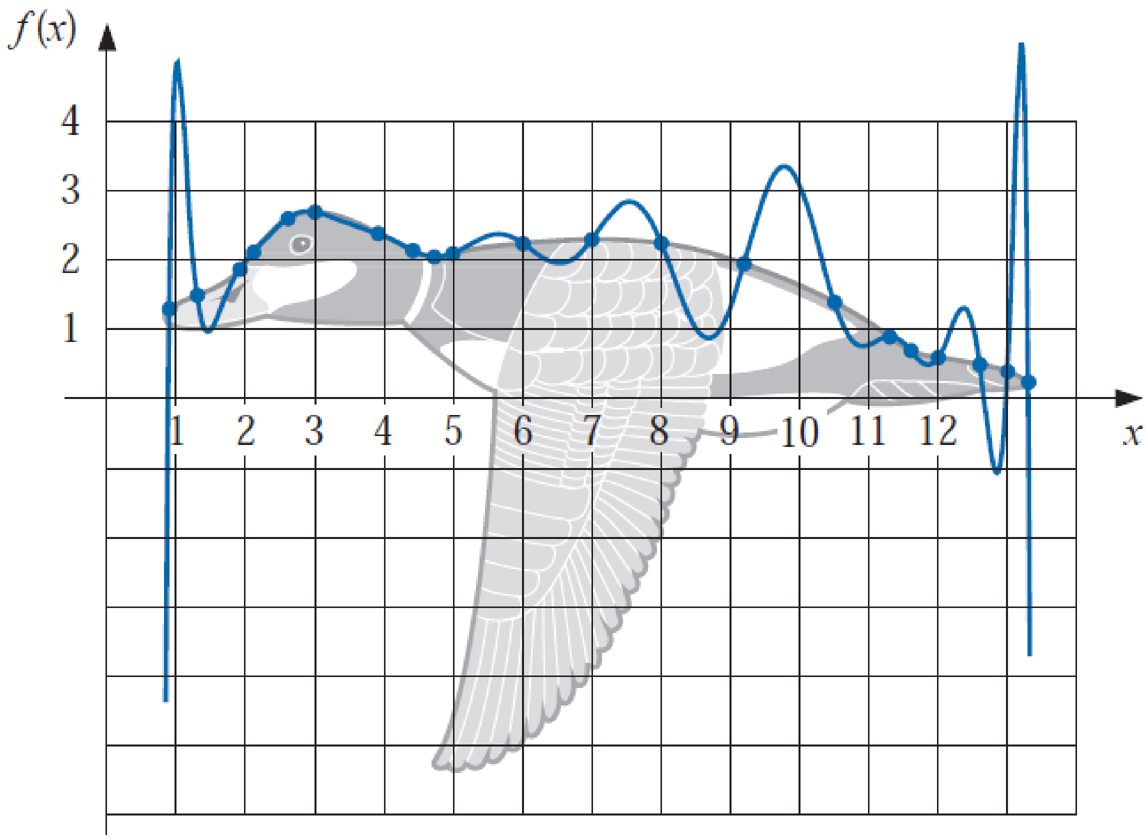
Los valores de los coeficientes calculados se detallan en al tabal siguiente:

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0.9	1.3	5.40	0.00	−0.25
1	1.3	1.5	0.42	−0.30	0.95
2	1.9	1.85	1.09	1.41	−2.96
3	2.1	2.1	1.29	−0.37	−0.45
4	2.6	2.6	0.59	−1.04	0.45
5	3.0	2.7	−0.02	−0.50	0.17
6	3.9	2.4	−0.50	−0.03	0.08
7	4.4	2.15	−0.48	0.08	1.31
8	4.7	2.05	−0.07	1.27	−1.58
9	5.0	2.1	0.26	−0.16	0.04
10	6.0	2.25	0.08	−0.03	0.00
11	7.0	2.3	0.01	−0.04	−0.02
12	8.0	2.25	−0.14	−0.11	0.02
13	9.2	1.95	−0.34	−0.05	−0.01
14	10.5	1.4	−0.53	−0.10	−0.02
15	11.3	0.9	−0.73	−0.15	1.21
16	11.6	0.7	−0.49	0.94	−0.84
17	12.0	0.6	−0.14	−0.06	0.04
18	12.6	0.5	−0.18	0.00	−0.45
19	13.0	0.4	−0.39	−0.54	0.60
20	13.3	0.25			

El resultado es:



Y empleando un polinomio interpolador de Lagrange utilizando los mismos datos, el resultado es el siguiente: (El polinomio de interpolación en este caso es de grado 20 y oscila salvajemente. Produce una ilustración muy extraña de la parte posterior de un pato, en vuelo o de otro modo)



REFERENCIAS

Métodos Numéricos para Ingenieros, 7a Edición (2015). Steven C. Chapra y Raymond P. Canale

Análisis Numérico 10ª Edición (2017). Richard L. Burden, J. Douglas Faires y Annette M. Burden