○ Trabajo Práctico Nº 22: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Primer Orden. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Orden Superior.*

> *"La ignorancia afirma o niega rotundamente; la ciencia duda".*
>
> *Francois Marie Arouet (Voltaire).*

1) Cuestionario

a) ¿Qué es una Ecuación Diferencial (E.D.)?
b) ¿Cuál es el Orden de una E.D.?
c) ¿En qué casos una E.D. es Ordinaria (E.D.O.)?
d) ¿Cuándo una E.D. es Parcial?
e) ¿Cuáles son las E.D. de 1er. Orden Lineales?
f) Simbolice una E.D. Homogénea y una E.D. No Homogénea. Explique en qué difieren.

2) Ejercicios Resueltos

1.- Encuentra la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial Separable:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3 + y + 3x + xy$$

En primer lugar, factoreamos (Segundo Caso), descomponiendo en grupos de igual número de términos con un factor común en cada grupo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (3 + y) + (3x + xy)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (3 + y) + x.(3 + y)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (3 + y).(1 + x)$$

Luego, separamos variables:

$$\frac{1}{(3+y)}\frac{\partial y}{\partial x} = (1 + x)$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por ***dx***:

$$\frac{1}{(3+y)}\, dy = (1 + x)\,\mathrm{dx}$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int \frac{1}{(3+y)}\, dy = \int (1 + x)\,\mathrm{dx}$$

Resolvemos ambas integrales:

$$\ln(3+y) = x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$3 + y = e^{x+\frac{1}{2}x^2+C}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = e^{x+\frac{1}{2}x^2+C} + 3} \longrightarrow \text{S. G.}$$

(SOLUCIÓN GENERAL)

2- Encuentra la Solución General:

$$xy' - 4y = 6x$$

Comenzamos pasando el factor ***x*** del segundo miembro como divisor al primer miembro:

$$\frac{xy'-4y}{\boldsymbol{x}} = 6$$

Distribuimos el denominador y simplificamos ***x*** en el primer término:

$$\frac{xy'}{\boldsymbol{x}} - \frac{\boldsymbol{4y}}{\boldsymbol{x}} = 6$$

$$y' - \frac{\boldsymbol{4y}}{\boldsymbol{x}} = 6 \qquad 1$$

Proponemos ahora un ***Factor Integrante*** $\boldsymbol{\rho(x)}$:

$$\rho(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx}$$

$$\rho(x) = e^{4.\ln x}$$

$$\rho(x) = e^{lnx^4}$$

$$\rho(x) = x^4$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad 1 por el ***Factor Integrante*** $\boldsymbol{\rho(x) = x^4}$:

$$x^4.y' - x^4.\frac{\boldsymbol{4y}}{\boldsymbol{x}} = 6\,.\,x^4$$

Vemos que ambos términos del primer miembro de la igualdad provienen de $\frac{\boldsymbol{\partial(x^4.y)}}{\boldsymbol{\partial x}}$ entonces:

$$\frac{\partial(x^4.y)}{\partial x} = 6\,x^4$$

Multiplicamos por ***dx*** e integramos ambos miembros de la igualdad:

$$x^4y = \int 6\,x^4\,dx$$

$$x^4y = 6\int x^4\,dx$$

$$x^4y = \frac{6}{5}x^5 + C$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{\frac{6}{5}x^5+C}{x^4}} \longrightarrow \text{S. G.}$$

(SOLUCIÓN GENERAL)

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Clasifica las siguientes EDO de primer orden en lineales, no lineales, separables, homogéneas y no homogéneas:

a) $y' = 3xy$

b) $xy' + yy' = x^2 + 2 - y$

c) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\, sen \frac{\partial y}{\partial x} - y = 0$

2.- Determina si las funciones definidas por: $y = 2e^x$ **y por:** $y = 3x$ **son soluciones de la EDO:**

$$y''(1-x) + y'x = 0$$

3.- Verifica que: $y = \operatorname{sen} 2x$ **y que:** $y = \cos 2x$ **son soluciones de la EDO:** $y'' + 4y = 0$

4.- Encuentra una función $y = f(x)$ **que satisfaga los siguientes problemas con condiciones iniciales:**

a) $f'(x) = (x-2)^3$, $f(2) = 1$

b) $f''(x) = x^4 - 6^x$, $f'(0) = 1$, **la función** f **pasa por** $(1;1)$

5.- Encuentra la Solución General de las siguientes Ecuaciones Diferenciales Separables:

a) $\frac{\partial y}{\partial x} = y^3 \cos x$

b) $2\sqrt{x}\, y' = \sqrt{1-y^2}$

6.- La tasa de variación de una población responde al modelo siguiente (donde *P* es la población en el tiempo *t*):

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4\, P\left(1 - \frac{P}{230}\right)$$

a) Sin resolver la EDO responde:

¿Para qué valores de P **la población está en equilibrio?**

¿Para qué valores de P **la población está creciendo?**

¿Para qué valores de P **la población está decreciendo?**

b) Obtiene la Solución General de la EDO.

7.- Resuelve el problema de Valor Inicial dado:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x^5}{y^2(x^6+3)}\,, \qquad y(0) = 1$$

8.- Encuentra la Solución General o Particular, según corresponda:

a) $\frac{\partial y}{\partial x} + y = 7^x$

b) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{3y}{t} + 4t^2\,, \quad y(1) = 3$

9.- Encuentra las Soluciones Generales de las siguientes Ecuaciones Diferenciales. Emplea el método de Sustitución para obtener la Solución:

a) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4y^2 - x^2}{4xy}$ **b)** $(x-y)y' = x + y$ **c)** $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$

10.- Verifica si se trata del Diferencial Exacto de una función de dos variables igualado a cero, y resuelve:

$$(2x + sen\,y - ye^{-x})\,dx + (x\cos y + \cos y + e^{-x})\,dy = 0$$

11.- Resuelve: $(4x + 3y^3)dx - 3xy^2dy = 0.$ **Verifica previamente que puedes resolver encontrando un factor integrante que sea función de una variable.**

12.- Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden, dos funciones y_1 **e** y_2**, y un par de condiciones iníciales, compruebe que** y_1 **e** y_2 **son soluciones de las ecuaciones diferenciales. Expresa la solución general, y luego encuentre la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:**

a) $y'' - y = 0, \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

b) $y'' + 25y = 0, \quad y_1 = \cos 5x\,, \quad y_2 = \operatorname{sen} 5x\,, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 8$

13.- Encuentra la solución general de las siguientes EDO:

a) $y'' - 36y = 0$ **b)** $y'' - 3y' - 10y = 0$ **c)** $y'' + 8y' + 25y = 0$

14.- Resuelve los siguientes problemas con la condición inicial dada en cada caso:

a) $y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2$

b) $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$

15.- Encuentra la solución general para las EDO de Segundo Orden No Homogéneas. Emplea el método de los coeficientes indeterminados para determinar la solución particular y_P **.**

a) $y'' + 25y' = 6x + 2$ **b)** $y'' + y' + 4y = e^{8x}$ **c)** $y'' - 7y' + y = \cos 3x$

16.- Formula la forma apropiada para una solución particular y_P , pero no determines los valores de los coeficientes:

a) $y'' + 4y = 3x\cos 2x$

b) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - \cos 3x$

17.- Encuentra la Solución Particular en los siguientes casos:

a) $y'' + 4y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9$

b) $y'' - 2y = \cos 2x\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

c) $y'' + y' - 12y = e^{x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$

4) Ejercicios adicionales

1.- Encuentra una función $y = f(x)$ que satisfaga el siguientes problema con condiciones iniciales:

$y^3dx + dy = -y^3x^2dx$**,** el punto $(1; -1)$ pertenece a la solución

2- Encuentra las Soluciones General y Particular:

$\frac{\partial y}{\partial t} = 3y + \cos t\ , \quad y(-1) = 8$

3.- Encuentra la solución general de la siguiente EDO:

$y'' + 18y' + 85y = 0$

4.- Resuelve proponiendo un agrupamiento:

$x\,dy - y\,dx = x^2e^{x}dx$