○ Trabajo Práctico Nº 21: *Integrales dobles.*

> *"La vida es sólo un vistazo momentáneo de las maravillas de este asombroso universo".*
>
> *Carl Sagan.*

1) Cuestionario

a) **Si** $z = f(x;y)$ **es contínua en un Rectángulo** $R = \{(x;y)\ /a \le x \le b\ \ \boldsymbol{y}\ \ c \le y \le d\}$ **entonces según el Teorema de Fubini (respecto del intercambio de los límites de integración) podemos expresar la integral doble** $\iint_R f(x;y)\,dA$ **de dos maneras posibles: escriba ambas expresiones.**

b) **Si** ***D*** **es una región plana y acotada, y** $f(x;y) = 1$ **en la Región** ***D*****, entonces indique qué representa la expresión:** $\iint_D f(x;y)\,dA$

c) **Si** ***D*** **es una región plana y acotada, y** $f(x;y) \ge 0$ **es una función contínua en la Región** ***D*****, indique entonces qué representa la expresión:** $\iint_D f(x;y)\,dA$

2) Ejercicios Resueltos

1.- Emplea la integral doble para calcular el área entre las curvas dadas:

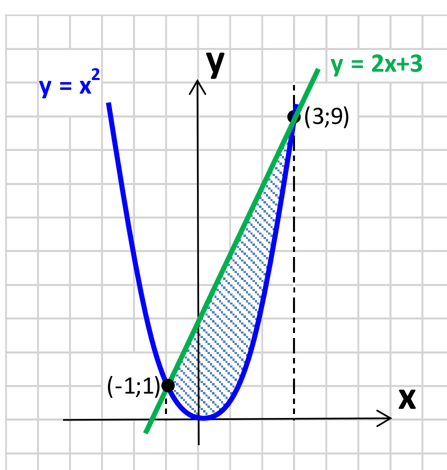
$$y = x^2;\quad y = 2x + 3$$

Es muy importante que se construya el gráfico correspondiente al área a determinar. Para ello, igualamos ambas expresiones y determinamos los puntos de intersección de ambas curvas:

$x^2 = 2x + 3$ => $x^2 - 2x - 3 = 0$ => $\boldsymbol{x_1 = -1}$ y $\boldsymbol{x_2 = 3}$

Luego, reemplazando los valores obtenidos para $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y = 2x + 3}$ tenemos: $\boldsymbol{y_1 = 1}$ e $\boldsymbol{y_2 = 9}$

Representamos gráficamente entonces ambas curvas y el área encerrada entre ellas:



Calculamos entonces el área solicitada:

$$A = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx = \int_{-1}^{3}\left[\int_{x^2}^{2x+3} dy\right]dx = \int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx = \left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$

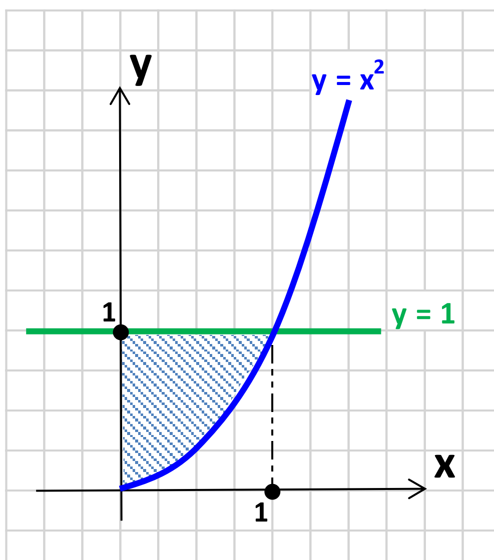
$$A = (9+9-9)-\left(1-3+\frac{1}{3}\right) = 9+\frac{5}{3} \qquad \therefore \quad \boxed{A = \frac{32}{3}}$$

2.- Determina el volumen del sólido que se encuentra entre la superficie $z = f(x;y)$ **y la región en el plano** xy **limitada por las curvas dadas:**

$$z = 2x + y; \quad x = 0; \quad y = 1; \quad x = \sqrt{y}$$

Construimos primero el gráfico correspondiente. Para ello tengamos en cuenta que la expresión:

$x = \sqrt{y}$ puede escribirse de la forma: $y = x^2$



Calculamos entonces el volúmen solicitado:

$$V = \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}}(2x+y)dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{y}}(2x+y)dx\right]dy = \int_{-1}^{3}[x^2+xy]_0^{\sqrt{y}}dy =$$

$$V = \int_0^1 (y + y\sqrt{y})dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \qquad \therefore \quad \boxed{V = \frac{9}{10}}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Evalúa las siguientes integrales:

a) $\int_2^4 (4\mathrm{x}+3\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$ **b)** $\int_2^4 (5xy^2+2x^2y)\,dx$ **c)** $\int_0^2\int_0^2 ye^x\,dxdy$

d) $\int_{-1}^1\int_0^y (x+y)^2\,dxdy$ **e)** $\int_0^1\int_0^2 xy^2\,dxdy$

2.- Calcula las siguientes integrales en las regiones rectangulares R del plano indicadas:

a) $\iint_R xy^2\,dA$ $\qquad \boldsymbol{R}=\{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\ \mathbf{1}\le\boldsymbol{x}\le\mathbf{2}\ \wedge\ \mathbf{0}\le\boldsymbol{y}\le\mathbf{3}\}$

b) $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ $\qquad \boldsymbol{R}=\{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\ -\mathbf{2}\le\boldsymbol{x}\le\mathbf{2}\ \wedge\ \mathbf{0}\le\boldsymbol{y}\le\mathbf{2}\}$

c) $\iint_R \operatorname{sen}(x-y)\,dA$ $\qquad \boldsymbol{R}=\left\{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\ \mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\ \wedge\ \mathbf{0}\le\boldsymbol{y}\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right\}$

d) $\iint_R (x+2y)\,dA$ $\qquad \boldsymbol{R}=\{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\ \mathbf{1}\le\boldsymbol{x}\le\mathbf{3}\ \wedge\ \mathbf{1}+\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y}\le\mathbf{2}\boldsymbol{x}\}$

3.- Dibuja la región de integración y luego calcula la integral:

a) $\int_0^1\int_0^{2x} x^4\,dydx$

b) $\int_2^3\int_0^{y-2} x\,dxdy$

c) $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x+y)\,dxdy$

4.- Emplea la integral doble para calcular el área entre las curvas dadas:

a) $y=2x^2-x;\quad y=-x$
b) $y=x^2+4;\quad y=2x^2$

c) $y^2=x;\quad x-2y=3$

5.- Determina el volumen del sólido que se encuentra entre la superficie $z=f(x;y)$ y la región en el plano xy limitada por las curvas dadas:

a) $z=x+y+1;\quad x=0;\quad x=2;\quad y=0;\quad y=2$

b) $z=2x^2+y;\quad x=0;\quad y=0;\quad 3x+y-3=0$

6.- Evalúa invirtiendo el orden de integración

a) $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{(-y/x)}\, dxdy$ **b)** $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dxdy$

7.- Completa con los extremos correctos de modo que se verifiquen las identidades. Dibuja previamente la región de integración.

a) $\int_{-1}^3 \int_1^2 (x^2+y)\, dydx = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} (x^2+y)\, dxdy$

b) $\int_0^4 \int_0^{2x} x^2\, dydx = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} x^2\, dxdy$

c) $\int_0^2 \int_{y+2}^4 y\, dxdy = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} y\, dydx$

d) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x+y)\, dydx = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} (x+y)\, dxdy$

8.- Dada la integral doble $\int_1^2 \int_{-x}^x xe^y\, dydx$**, plantea el cálculo cambiando el orden de integración de las variables. ¿Cuántas integrales dobles necesitas plantear en este caso para resolver? Propone y resuelve. Compara el resultado con el ejercicio adicional Nº 2.**

9.- Completa con la respuesta correcta y justifica:

Si $\boldsymbol{f(x;y)=6}$ **en el rectángulo** $\boldsymbol{R/R=\{(x;y)/\ 1\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\}}$**, entonces:**

$$\iint_R f(x;y)\, dA = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

10.- Completa con la respuesta correcta. Justifica las respuestas dadas

a) $\int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} f(x;y)\, dydx = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f(x;y)\, dxdy$

b) $\int_{-1}^2 \int_1^3 e^{x-y}\, dydx = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} e^{x-y}\, dxdy$

4) Ejercicios adicionales

1.- Evalúa la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\cos y} (1+2x\, tg^2\, y)\, dxdy$$

2.- Dibuja la región de integración y luego calcula la integral:

$$\int_1^2 \int_{-x}^x xe^y\, dydx$$

3.- Emplea la integral doble para calcular el área entre las curvas dada:

$$y=x; \quad x=4; \quad y=0; \quad y=4$$