○ Trabajo Práctico Nº 20: *Funciones de dos o más variables: Derivada Direccional. Extremos relativos de una función de dos variables.*

> *"La inteligencia es la capacidad de adaptarse al cambio".*
>
> *Stephen Hawkin.*

1) Cuestionario

a) Escriba y simbolice la definición de ***Gradiente de una función.***

b) Enuncie y simbolice el ***Teorema*** que define la ***Derivada Direccional***.

c) Enuncie y simbolice: ***Valor Máximo y mínimo de la Derivada Direccional***.

d) Defina ***Punto Crítico.***

e) Qué condiciones deben cumplir el ***Hessiano (D)*** y la $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $(a;b)$ para que la función $f(x;y)$ presente: un mínimo Relativo en $(a;b)$; un Máximo Relativo en $(a;b)$; un Punto Silla en $(a;b)$.

f) Qué conclusión obtenemos si el Hessiano es nulo (D= 0)?

2) Ejercicio Resuelto

Determina las direcciones en las que la derivada de la función $f(x;y) = y^2 + \cos(xy)$ en el punto $P(0;1)$ tiene el valor 1.

- $\nabla f_{(x;y)} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial y}\right) \quad => \quad \nabla f_{(x;y)} = [-y.sen(xy); 2y - sen(xy)]$
- $\nabla f_{(0;1)} = [-1.sen(0); 21 - sen(0)] = (-1.0; 2.1 - 0) \quad => \quad \nabla f_{(0;1)} = (0;2)$
- $|\nabla f_{(0;1)}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{2^2} \quad => \quad |\nabla f_{(0;1)}| = 2$
- $\left|\overrightarrow{u}_{(0;1)}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} \quad => \quad \left|\overrightarrow{u}\right| = 1$
- $\nabla f_{(0;1)} . \overrightarrow{u} = 1$ (condición inicial)

$=> \quad \nabla f_{(0;1)} . \overrightarrow{u} = |\nabla f_{(0;1)}| . \left|\overrightarrow{u}\right| . cos\theta = 1$

$=> \quad \nabla f_{(0;1)} . \overrightarrow{u} = 2 . 1 . cos\theta = 1 => cos\theta = \frac{1}{2} => \theta = arc\left(cos\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \quad \begin{cases} \theta_1 = 60° = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 = 300° = \frac{5}{3}\pi \end{cases}$$

son las direcciones en las que la derivada de $f(x;y)$ en el punto $P(0;1)$ tiene el valor 1.

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Calcule el gradiente de las siguientes funciones:

a) $f(x; y) = 3x + 4y$
b) $f(x; y) = x^2 + xy - 2y^2$
c) $f(x; y; z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2$

2.- Dada $f(x; y) = x^2 - 5xy + 4y^2$, **el punto** $P(1; -2)$ **y el vector** $\vec{\mu}\,(-2; 1)$,

a) **Halla el gradiente de** f **y evalúa el gradiente de** f **en** P.

b) **Determina la tasa de cambio de** f **en** P **y en la dirección del vector** $\vec{\mu}$ **en** P.

3.- Obtiene las derivadas direccionales en los puntos y en las direcciones indicadas:

a) $f(x; y) = x^3y^2, \quad P(2; 1), \quad \vec{a}\,(2; -3)$
b) $f(x; y) = y^2 + 2\ln x, \quad P(1; 2), \quad \vec{a}\,(-1; 1)$
c) $f(x; y; z) = 2xy^2 + yz^3, \quad P(-1; 1; 2), \quad \vec{a}\,(2; -2; 2)$

4.- Encuentra la máxima derivada direccional de f **en el punto** P **y la dirección en que ocurre:**

a) $f(x; y) = \ln(x^3 + y)$ **y** $P(1; 2)$ b) $f(x; y) = 3^{y/x}$ **y** $P(-1; 2)$

5.- Responde por Verdadero o Falso y Justifica:

a) **Dada** $z = f(x; y)$, **el** ∇f **tiene la dirección en la que** f **crece más rápidamente en** $(x; y)$

b) **Si** $f(x; y) = 9x + 9y$, **entonces** $|\boldsymbol{D_u f(x; y)}| \leq 9$

c) **Si existe** $D_u f(x;y)$, **entonces** $D_{-u}f(x;y) = -D_u f(x;y)$

6.- Supone que la temperatura en ºC en el punto $P(x; y; z)$ **está dada por la fórmula:**

$T(x; y; z) = 64 - -x^2 - y^2 - z^2$ **donde las unidades para** x, y, z **son** *metros*.

a) **Determina la razón de cambio de la temperatura en el punto** $P(2; -3; 4)$ **y en la dirección de** $v = 2i - 3j + 6k$

b) **En qué dirección crece** T **más rápidamente en** P.

c) **¿Cuál es valor de la máxima derivada direccional en** P**?**

7.- La temperatura T **en el plano** xy **está dada por** $T(x; y) = x^2 - 2y^2$.

a) **Dibuja un mapa de contornos de** T **que muestre algunas isotermas (curvas de temperaturas constantes).**

b) **En qué dirección debería moverse una hormiga que estuviera en la posición** $(2; -1)$ **si deseara enfriarse tan rápidamente como fuera posible? Si la hormiga se mueve en esa dirección con velocidad** k, **con que tasa experimentará la disminución de temperatura?**

c) ¿Con qué tasa la hormiga experimentaría la disminución de temperatura si se moviera con velocidad k desde el punto $(2;-1)$ en la dirección del vector $v=-2i+j$? ¿A lo largo de que curva que pasa por el punto $(2;-1)$ debería moverse la hormiga para seguir experimentando una tasa máxima de enfriamiento?

8.- Determina y clasifica los puntos críticos de las funciones $f(x;y)$ siguientes:

a) $f(x;y)=2x^2+y^2-4x-4y$

b) $f(x;y)=yx+y-x$

c) $f(x;y)=x^3+y^3-2xy$

9.- La suma de tres números positivos *m*, *n* **y** *p* **es** *24*. **¿Cuál es el máximo valor de** $m.n.p$ **?**

10.- Se debe construir un recipiente cuyo volumen sea *40 litros*, **el fondo debe ser rectangular, sin tapa, y los materiales a utilizar tienen un costo de** *$4,00* **el** m^2 **para el fondo y** *$3,00* **el** m^2 **las superficies laterales. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizarían su costo?**

4) Ejercicios adicionales

1.- Calcula el gradiente de la siguiente función:

$$\mathrm{f(x;y)=e^y.\cos x} \quad \textbf{en} \quad P\left(\frac{\pi}{3};0\right)$$

2.- Determina y clasifica los puntos críticos de la función $f(x;y)$ siguiente:

$$f(x;y)=x.\cos y$$

3.- Si se quiere que las paredes y el fondo de un tanque de sección rectangular sin tapa tengan una superficie total de *216 m* **¿Cuáles son las dimensiones del tanque que maximizan el volumen?**