○ Trabajo Práctico Nº 19: *Funciones de dos o más variables: Derivadas Parciales y Diferencial.*

"No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas, ni ninguna de las basadas en las matemáticas".

Leonardo Da Vinci.

1) Cuestionario

a) **Escriba la definición de la *Derivada Parcial de f con respecto a x*, y también la definición de la *Derivada Parcial de f con respecto a y.***

b) **En relación con la *Interpretación geométrica de las Derivadas Parciales*, escriba qué representa la $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (a ; b) $\in D_f$, y también qué representa la $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (a ; b) $\in D_f$**

c) **Enuncia el *Teorema de Clairant* (derivadas cruzadas).**

d) **El Teorema expresa: *Si Z = f (x ; y) es diferenciable en (x ; y) entonces f es Contínua en (x ; y).* ¿Se cumple la Recíproca?**

2) Ejercicio Resuelto

- **Determina las derivadas parciales de tercer orden que se indican:**

Si: $\boldsymbol{f(x;y;z) = x^3z - x^4y^3z^5 + yz^4}$, obtiene $\boldsymbol{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}}$

Calculamos en primer lugar la derivada **primera** de $\boldsymbol{f(x;y;z)}$ con respecto a la variable $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\mathrm{x}^2\mathrm{z} - 4\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3\mathrm{z}^5$$

Luego calculamos la derivada de $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ con respecto a la variable $\boldsymbol{y}$, que es la derivada segunda de $\boldsymbol{f(x;y;z)}$ con respecto de $\boldsymbol{x}$ y con respecto de $\boldsymbol{y}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^3y^2z^5$$

Finalmente calculamos la derivada de $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$ con respecto a la variable $\boldsymbol{z}$, que es la derivada **tercera** de $\boldsymbol{f(x;y;z)}$ con respecto de $\boldsymbol{x}$, con respecto de $\boldsymbol{y}$ y con respecto de $\boldsymbol{z}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}{\partial z} = \boldsymbol{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 60x^3y^2z^4}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Calcula las derivadas parciales de primer orden para cada una de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = (4x + 6y^3)^5$ b) $f(x;y) = (5x + \operatorname{sen} y)^{5/9}$

c) $f(x;y) = \frac{x^5+y^3}{x+y}$ d) $f(t;w) = 5^{\cos t}.\operatorname{tg} w$

e) $f(x;y;z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

2.- Verifica que para las siguientes funciones se cumple $f_{xy} = f_{yx}$ para todo $(x;y)$ ¿Porqué, en estos casos, debe cumplirse esta ecuación para todo $(x;y)$?

a) $f(x;y) = x^6y^3 + 5x^3y^4 - 2x^3$ b) $f(x;y) = sen^2\, x\,.\,cos^2\, y$

3.- Determina las derivadas parciales de tercer orden que se indican en cada caso:

a) Si: $f(x;y) = 4x^7y^2 + 7x^3y^4$, obtiene f_{xxx} y f_{yxy}

b) Si: $f(x;y) = \operatorname{sen}(6x^2 + 5y)$, obtiene f_{yyx}

c) Si: $f(x;y;z) = 5^{x^2+yz}$, obtiene f_{yzx}

4.- Determina si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, **para todo** $(x;y)$ **en el domino de** u. ***(Nota: Las funciones que verifican la ecuación de Laplace se llaman "funciones armónicas").***

a) $u(x;y) = 5x^7y^2 - 6y^3x^5$ b) $u(x;y) = x^3 - y^3$

c) $u(x;y) = e^{ky}.\cos(kx)$ d) $u(x;y) = \ln(x^2 + y^2)$

5.- Determina si $u = e^{2x+3y}.\operatorname{sen}(4z)$ **es Armónica para todo** $\mathbb{R}^3$**, es decir, demuestra si se trata de una solución de la ecuación de Laplace tridimensional:** $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, **para todo** $(x;y;z)$ **en el domino de** u.

6.- Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie $17z = 4x^2 + 16y^2$ **con el plano** $x = 1$ **en el punto** $(1;2;4)$

7.- La ley de los gases ideales $P.V = n.R.T$ **donde** n **es el número de moles del gas ,** R **es una constante, y** $P,\ V,\ T$ **son presión, volumen y temperatura respectivamente.**

Muestra que: $V\frac{\partial P}{\partial V} + T\frac{\partial P}{\partial T} = 0$

8.- Si $z = f(x;y) = x^2 + 3xy - y^2$, **encuentra la expresión de** Δz **y de** dz **(la diferencial de** z**) para la función dada. Calcula** Δz **y** dz **si** x **cambia de** *2* **a** *2,05* **e** y **de** *3* **a** *2,96*. **Compare los valores de** Δz **y** dz.

9.- Halla la diferencial total de las siguientes funciones:

a) $z = \log_4(2x^2 + 3y^2)$ b) $z = x^3 + y^5$ c) $z = x^2.4^{-y^3}$

10.- La expresión del período T **de un péndulo simple está dada por:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. **Hallar el máximo error probable que se cometería si la longitud** L **crece en** *1/50 m*, **y la aceleración de la gravedad** g **disminuye en** *3/50 m/s²*.

11.- Si R es la resistencia total de tres resistencias R_1, R_2, R_3, **conectadas en paralelo, se verifica la ecuación:**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si las resistencias medidas en ohm son $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ **y** $R_3 = 50\ \Omega$ **con posibles errores de** *0.5%* **en cada caso, estima el error máximo en el cálculo de** R.

12.- Demuestra que las siguientes funciones son diferenciables en todos los puntos de su dominio:

a) $f(x;z) = x.3^z$ b) $z = x \ln y$

13.- Establece si el siguiente enunciado es Verdadero o Falso:

Si para la función $z = f(x;y)$ **existen derivadas parciales continuas en la región rectangular del plano definida por** $a < x < b$ **y por** $c < y < b$ **entonces existen** ε_1 **y** ε_2 **funciones de** Δx **y** Δy **tales que podemos obtener:** $\Delta z = f_x(x;y)\,\Delta x + f_y(x;y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

donde: $\lim\limits_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \varepsilon_1 = 0$ **y** $\lim\limits_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \varepsilon_2 = 0$

14.- En cada caso determina si la expresión diferencial es exacta. Si es así obtiene la función que la verifica y expresa la ecuación dada en la forma $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x;y)$

a) $e^{xy}(xy+1)dx + x^2e^{xy}dy$ b) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy$

15.- Demuestra que las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) **La solución general de la EDO** $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)$ **es** $x^2 + y^2 = 20$

b) $x^3.4^{x^3} = k$ **es la solución general de la EDO** $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{xy^2 \ln 4}$

4) Ejercicios adicionales

1.- Determina la derivada parcial de tercer orden que se indica:

Si: $\boldsymbol{f(x;y;z) = tg(xy + yz + xz)}$ obtiene: obtiene $\boldsymbol{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}}$

2.- Determina si la función siguiente es una solución de la ecuación de Laplace:

$\boldsymbol{u(x;y) = e^{4x}.\cos(4y) - e^{5y}.\cos(5x)}$

3.- Demuestra que la siguiente proposición es verdadera:

La familia de rectas $5x + 2y = k$ verifican la ecuación $\frac{5}{5x+2y}dx + \frac{2}{5x+2y}dy = 0$