○ Trabajo Práctico Nº 18.- *Funciones de dos o más variables: límite y continuidad.*

"Hay una fuerza motríz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: esa es la voluntad".

Albert Einstein.

1) Cuestionario

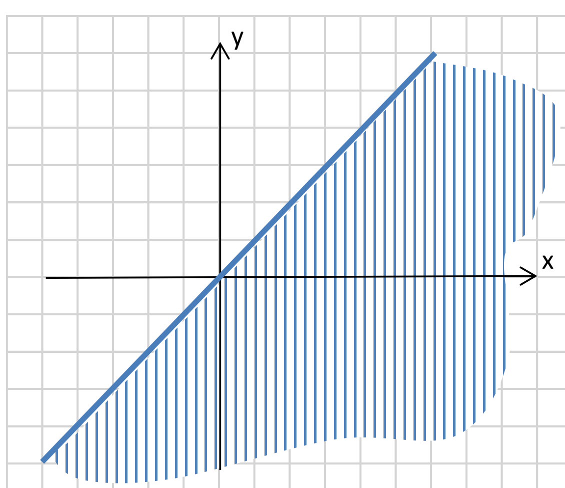
a) ¿Qué es una función de "dos" variables? ¿Qué es una función de "tres" variables? ¿Y qué es una función de "n" variables?
b) Detalle los pasos a seguir para representar gráficamente una función de dos variables.
c) Escriba qué representan las Curvas de Contorno o Curvas de Nivel.
d) Enuncie al menos seis (6) Teoremas de límites de funciones de dos variables.
e) Clasifique los tipos discontinuidades de funciones de dos variables
f) Enuncie al menos cuatro (4) Teoremas de Continuidad de funciones de dos variables.

2) Ejercicios Resueltos

1.- Halle el dominio de la siguiente función, y represente gráfica y simbólicamente el conjunto obtenido:

$$\boldsymbol{f(x;y) = \sqrt{x-y}}$$

Analizamos el radicando: => $x - y \geq 0$ => $\boldsymbol{x \geq y}$



De modo que el Dominio queda expresado como: $\boxed{D = \{\, (x;y) \in R^2 \;/\; x \geq y \,\}}$

2.- Evalúe el siguiente límite:

$$\lim_{(x;y)\to(1;-2)}(3-4xy+5y^2)$$

Aplicando las propiedades de límites:

$$\lim_{(x;y)\to(1;-2)}(3-4xy+5y^2) = \lim_{(x;y)\to(1;-2)} 3 - \lim_{(x;y)\to(1;-2)} 4xy - \lim_{(x;y)\to(1;-2)} 5y^2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x;y)\to(1;-2)}(3-4xy+5y^2) = 3 - 4.\lim_{(x;y)\to(1;-2)} xy - 5.\lim_{(x;y)\to(1;-2)} y^2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x;y)\to(1;-2)}(3-4xy+5y^2) = 3-4.1.(-2)-5.(-2)^2 = 3+8-5.4 = 11-20 = -9$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{(x;y)\to(1;-2)}(3-4xy+5y^2) = -9}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Una caja de aluminio, sin tapa, tiene una base rectangular de tal forma que el ancho de la base es igual a 4 veces el largo de la base. Exprese el volumen de la caja en función de uno de los lados de la base y de la altura de la caja.

2.- Exprese el volumen de un cono recto en función de su generatriz *x*, y del radio de la base *y*, sabiendo que el Volumen del cono circular recto es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ (donde r es el radio de la base y *h* es la altura).

3.- Sea la función: $f(x;y) = \sqrt{x} + xy^2 + 2^{x-y}$

> **a) obtener: f(9;2), f(-9;2), f(0;3), f(4;1), f(t^4;t), f(x^4;1/x).**
>
> **b) Indicar cuál es el Dominio de esta función.**

4.- Encuentre F si: $F(t) = F(f(t); g(t))$ **y** $F(x;y) = x^2y$, **siendo** $f(t) = t.\operatorname{sen} t$ **y** $g(t) = \operatorname{cosec}^2 t$. **¿Cuál es el Dominio de** $F(t)$**? ¿ y cuál es el Dominio de** $F(x;y)$**?**

5.- Dadas las siguientes funciones, dibuje las curvas de nivel $z = k$ **para los valores de** k **indicados:**

> **a)** $z = f(x;y) = x - y$ **para** $k = 1,2,4,6,8$
>
> **b)** $z = f(x;y) = \frac{x^2}{y}$ **para** $k = -4, -1, 0, 1, 4$

6.- Un gas (considerado ideal) se encuentra dentro de un recipiente cerrado. Las magnitudes Temperatura, Presión y Volumen de dicho gas están relacionadas por la expresión: $T = \frac{1}{5}P.V$, **donde** $T\,[\text{Kelvin}]$ **es la Temperatura,** $P\,[\text{atmósferas}]$ **es la Presión, y** $V\,[\text{litros}]$ **es el Volumen. Dibuje las isotermas** $T_1 = 5\text{ K}$, $T_2 = 10\text{ K}$, $T_3 = 20\text{ K}$ **y** $T_4 = 30\text{ K}$.

7.- Halle el dominio de las siguientes funciones, y represente gráfica y simbólicamente el conjunto obtenido:

a) $f(x;y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ **b)** $f(x;y) = xy - x^2 - y^2$ **c)** $f(x;y) = \frac{x-y}{x+y}$

d) $f(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ **e)** $f(x;y) = \ln(x^2 - y^2 - 1)$

8.- Dadas las siguientes funciones, obtenga para cada caso:

a) el dominio y las intersecciones con los planos coordenados,
b) las curvas de nivel para los valores $z = k$ **que se indican, y además traza el mapa de contornos,**
c) represente gráficamente la superficie correspondiente.

i) $f(x;y) = 9x^2 + y^2$, $k = \{1; 2; 4\}$ **ii)** $f(x;y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$, $k = \{0; 1; 2; 4\}$

iii) $f(x;y) = \sqrt{y + x}$, $k = \{0; 5; 6; 9\}$ **iv)** $f(x;y) = y - x + 3$, $k = \{-3; -1; 0; 1; 3\}$

9.- Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;-1)} (2x^4 + 3x^2y - 5xy)$ **b)** $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{y^2}{x^4+2y^4}\right)$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{x+y}{xy+1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{3-x^2}{5+x+y}\right)$

e) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left[\frac{e^{xy}.\ \mathrm{sen}(xy)}{x\,y}\right]$

10.- Demuestre que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}\right)$ **no existe, considerando en la aproximación a (0,0):**

a) al eje de las x **como una trayectoria,**
b) a la recta $y = x$ **como otra trayectoria**
c) como trayectoria a lo largo de la parábola $y = x^2$.

11.- Sea: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{x^2\,y}{x^4+y^2}\right)$

a) Demuestre que $f(x;y) \to 0$ **cuando** $(x;y) \to (0;0)$ **a lo largo de cualquier recta** $y = mx$

b) Demuestre que $f(x;y) \to \frac{1}{2}$ **cuando** $(x;y) \to (0;0)$ **a lo largo de la parábola** $y = x^2$

c) ¿Cuál es tu conclusión respecto de la existencia del $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{x^2\,y}{x^4+y^2}\right)$**? Explica.**

12.- Dadas las siguientes funciones, determine todos los puntos donde cada función es contínua, y luego represente gráficamente la región obtenida:

a) $f(x;y) = 3x^3y^2 - 2x^2x^4$ **b)** $f(x;y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

c) $f(x;y) = \log(x - 2y)$ **d)** $f(x;y) = \begin{cases} \frac{2\,\mathrm{sen}(xy)}{xy} & \textbf{si: } xy \neq 0 \\ 2 & \textbf{si: } xy = 0 \end{cases}$

13.- Dadas las siguientes funciones discontinuas en $(0;0)$ y para las que $f(0;0)$ no existe, determine si la discontinuidad es evitable (o removible) o no evitable (o esencial). Si es evitable, vuelva a definir la función de modo que sea continua en el origen.

a) $f(x;y) = \frac{5}{2x^2+y^2}$ **b)** $f(x;y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ **c)** $f(x;y) = \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

4) Ejercicios adicionales

1.- Halle el dominio de la siguiente función, y represente gráfica y simbólicamente el conjunto obtenido:

$$f(x;y) = \frac{x}{\sqrt{9x^2-y^2}}$$

2.- Dada la siguiente función, obtenga:

a) el dominio y las intersecciones con los planos coordenados,

b) las curvas de nivel para los valores $z = k$ que se indican, y además traza el mapa de contornos,

c) represente gráficamente la superficie correspondiente.

$$f(x;y) = \sqrt{25 - y^2 - x^2}, \quad k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

3.- Evalúe el siguiente límite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \left(\frac{x^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}\right)$$