○ Trabajo Práctico Nº 17: *Aplicaciones de la integral definida.*

> *"La ciencia es respecto del alma lo que es la luz respecto de los ojos, y si las raíces son amargas, los frutos son muy dulces".*
>
> *Aristóteles.*

1) Cuestionario

a) Escriba la expresión que se utiliza para el Cálculo de Áreas de Regiones Planas

b) Detalle el procedimiento (los pasos a seguir) para el Cálculo del Área limitada por dos o más curvas

c) Escriba la expresión de la fórmula que se utiliza para el Cálculo de la Longitud de un Arco de Curva

d) Escriba la expresión de la fórmula que se utiliza para el Cálculo del Volúmen de un Sólido de Revolución

e) Escriba la expresión de la fórmula que se utiliza para el Cálculo del Área de un Sólido de Revolución

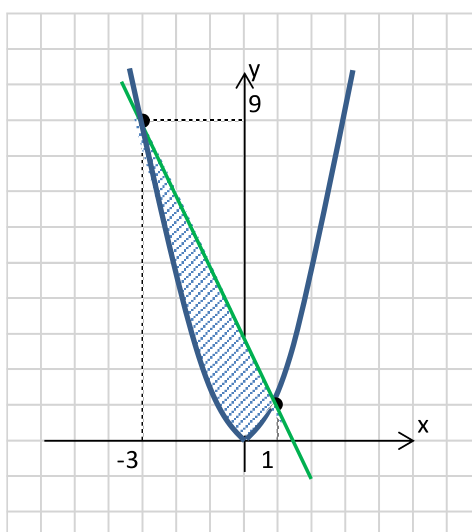
2) Ejercicio Resuelto

- **Calcular el área de la región limitada por las curvas cuyas ecuaciones son:**

$$y = x^2 \quad \text{con} \quad y = 3 - 2x$$

1º) Graficamos. Para ello buscamos los puntos de intersección entre ambas curvas resolviendo el Sistema. En este caso, igualamos:

$$x^2 = 3 - 2x \quad => \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad => \quad x_1 = -3 \quad y \quad x_2 = 1$$



2º) Identificamos la Región. Es el Área sombreada entre los puntos: $P_1(-3;9)$ y $P_2(1;1)$

3º) Planteamos la Integral Definida, en este caso consideramos que no es necesario dividir a la Región, y planteamos los límites de integración:

$$A = \int_{-3}^{1} [\,(3-2x) - x^2\,]\,dx$$

4º) Calculamos el Área:

$$A = \int_{-3}^{1} [\,(3-2x) - x^2\,]\,dx = 3\int_{-3}^{1} dx - 2\int_{-3}^{1} x\,dx - \int_{-3}^{1} x^2\,dx$$

$$\mathrm{A} = 3\,.[1-(-3)] - 2.\frac{1}{2}.\lfloor x^2 \rfloor_{-3}^{1} - \frac{1}{3}.\lfloor x^3 \rfloor_{-3}^{1}$$

$$\mathrm{A} = 3\,.(1+3) - [\,1^2 - (-3)^2] - \frac{1}{3}.[1^3 - (-3)^3]\;\mathrm{A} = 3\,.4 - (1-9) - \frac{1}{3}.[1-(-27)]$$

$$A = 12 - (-8) - \frac{1}{3}.[1+27] = 12 + 8 - \frac{1}{3}.28 = 20 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$$

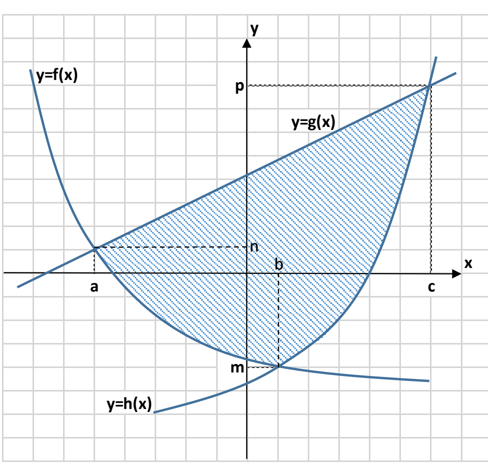
5º) Escribimos la Respuesta

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_{-3}^{1} [\,(\mathbf{3}-\mathbf{2x}) - \mathbf{x}^2\,]\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}}$$

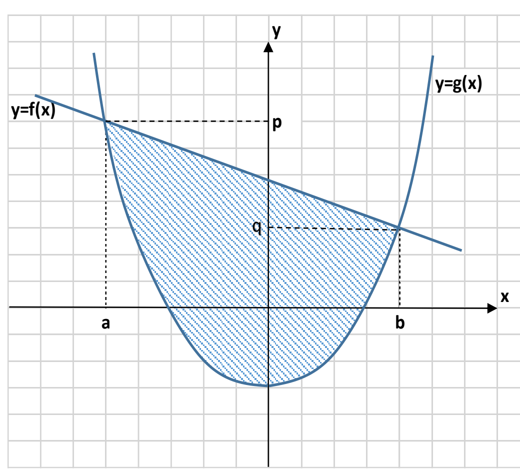
3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Plantea el cálculo del área de cada una de las superficies rayadas:

a)

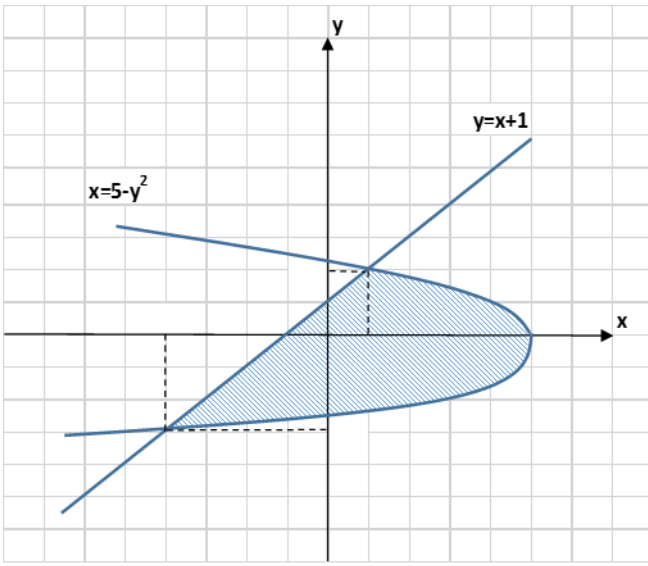


b)

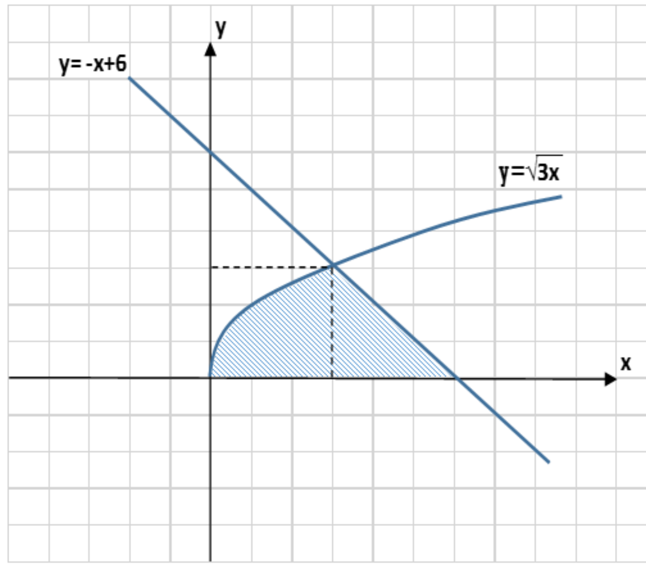


2.- Calcula el área de cada una de las superficies rayadas:

a)



b)



3.- Hallar el área de la región limitada por las curvas cuyas ecuaciones se indican:

a) $y = \frac{x^2}{2}$, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

b) la recta que pasa por los puntos $A(-3; -6)$ y $B(1; 2)$, con $y = x^2 - x$

c) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$

d) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

4.- Hallar, en cada caso, la longitud del arco de la curva cuya ecuación se indica:

a) $y = 4x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Comprobar aplicando el Teorema de Pitágoras.

b) $y = 4x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, desde $y = 1$ hasta $y = e$.

d) $y = \sqrt{2 - x^2}$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Comprobar considerando que la curva es parte de un círculo.

5.- Un halcón que vuela a una altitud de 200 m, y a una velocidad de 15 m/s, deja caer accidentalmente su presa. La trayectoria que describe la presa en el descenso hasta que choca con el suelo es parabólica, y responde a la ecuación: $y = 200 - \frac{1}{45}x^2$**, donde** y **es su altura en metros y** x **es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule, en metros, la distancia que recorre la presa desde el momento en que el halcón la suelta hasta el momento en que choca con el suelo.**

6.- Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región limitada por las curvas de ecuación:

a) $\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$, $\boldsymbol{x = 3}$, $\boldsymbol{y = 0}$, alrededor del eje x.

b) $\boldsymbol{x = \sqrt{16 - y^2}}$, $\boldsymbol{x = 0}$, alrededor del eje y.

c) $\boldsymbol{y = 4x^2}$, $\boldsymbol{y = 4x}$, alrededor del eje x.

d) $\boldsymbol{y = 6 - 3x}$, y los ejes coordenados: i) alrededor del eje x. ii) alrededor del eje y.

7.- Obtener la fórmula del volumen del cuerpo formado cuando, la región limitada por la curva de ecuación $y = 2\sqrt{1 - (x-4)^2}$ **y el eje x, gira alrededor del eje x.**

8.- En una empresa de la industria aeronáutica, los ingenieros diseñan un objeto que corresponde a parte de una turbina experimental. Dicha pieza (que se fabricará en Aluminio) se obtiene al hacer girar respecto del eje x la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ **e** $y = x^2$**. Se debe obtener la fórmula del volumen de la pieza.**

9.- Calcular el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva de ecuación $y = x^3$ **alrededor del eje** x**, siendo** $0 \leq x \leq 2$**.**

10.- Determinar el área del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x**, la curva de ecuación** $y = 2 + \sqrt{x}$ **para valores de** x **comprendidos entre** $x = 0$ **hasta** $x = 4$**.**

11.- Obtener el área de la superficie de revolución generada al hacer girar alrededor del eje y **la curva de ecuación** $x = \sqrt{1-y}$ **, con** $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

12.- Encontrar la expresión del área de la superficie lateral (incluida la base) de un cono de radio r **y altura** h**.**

<u>Nota</u>: El cono se obtiene al hacer girar alrededor del eje y**, la región limitada por la recta de ecuación** $y = h - \frac{h}{r}x$ **y el eje** y**.**

4) Ejercicios adicionales

1.- Hallar el área de la región limitada por las curvas cuyas ecuaciones se indican:

$\boldsymbol{x - y + 3 = 0}$ con $\boldsymbol{x + 3y = y^2}$ (integrar respecto del eje de ordenadas)

2.- Hallar, en cada caso, la longitud del arco de la curva cuya ecuación se indica:

$\boldsymbol{y = \int_1^x \sqrt{\sec^2 t - 1}\; dt}$ si $\boldsymbol{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]}$

3.- Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región limitada por las curvas de ecuación:

$\boldsymbol{y = e^x}$, $\boldsymbol{x = 1}$, y los ejes coordenados, gira alrededor del eje x.