○ Trabajo Práctico Nº 16: *Integral definida.*

> *"Las Matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo".*
>
> *Galileo Galilei.*

1) Cuestionario

a) Escriba la expresión de la Suma de Riemann

b) Explique en qué consiste la partición de un intervalo y para qué se efectúa

c) Exprese de qué se tata el incremento de la partición y para qué se hace

d) Escriba la Regla de Barrow (Teorema Fundamental del Cálculo)

e) Enuncie las Propiedades de la Integral Definida

2) Ejercicio Resuelto

Aplicando la definición, calcular la integral definida $\int_1^2 (4x - 5)\,dx$

Solución:

Recordar la definición de integral definida:

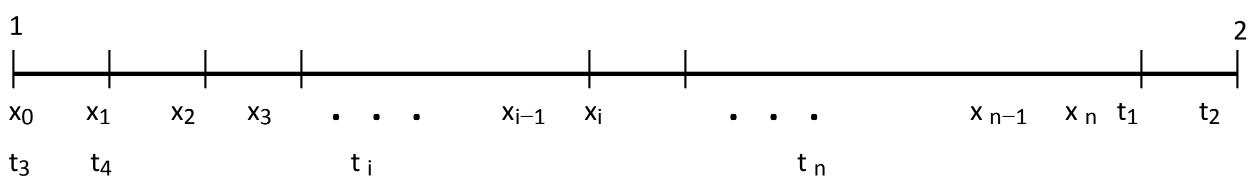
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \text{ , donde } \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \;;\; t_i \in [x_{i-1} - x_i] \;;$$

$P = \{x_0 = a \,,\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_{i-1} \,,\, x_i \,,\, \ldots \,,\, x_{n-1} \,,\, x_n = b\}$; $T = \{t_1 \,,\, t_2 \,,\, t_3 \,,\, \ldots \,,\, t_i \,,\, \ldots \,,\, t_n\}$

$\mu(P) =$ máximo$\{\Delta x_i \;;\; i = 1 \ldots n\}$

Como el integrando es una función continua en el intervalo de integración, la integral existe y su valor no depende ni de la partición ni del aumento elegido.

Es por ello que se puede elegir una partición donde los puntos son equidistantes y tomar como t_i, por ejemplo, el extremo izquierdo de cada subintervalo.



$=> \quad \Delta x_i = \frac{(2-1)}{1} = \frac{1}{n}$

$x_0 = 1$; $x_1 = 1 + 1/n$; $x_2 = 1 + 2/n$; $x_{i-1} = 1 + (i-1)/n$; $x_n = 1 + n/n = 2$

$t_i = x_{i-1} = 1 + (i-1)/n$; $\mu(P) = 1/n$ (pues todos los Δx_i son iguales);

$f(x) = 4x - 5$; $f(t_i) = 4\left(1 + \frac{i-1}{n}\right) - 5 = 4\frac{i-1}{n} - 1$; $f(t_i)\,\Delta x_i = \left(4\frac{i-1}{n} - 1\right)\frac{1}{n}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(4\frac{i-1}{n} - 1\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4\frac{i-1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1) - \sum_{i=1}^{n}1\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}i - \sum_{i=1}^{n}1\right) - \sum_{i=1}^{n}1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{4}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2} - n\right) - n\right) = \frac{1}{n}\left(2(n-1) - 4 - n\right) = \frac{n-6}{n}$$

donde debemos recordar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ (pág. 260 – Integración – CALCULO 1 – Larson)

$$\int_1^2 (4x - 5)\,dx = \lim_{\mu(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(4\frac{i-1}{n} - 1\right)\frac{1}{n} = \lim_{\mu(P)\to 0}\frac{n-6}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-6}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{6}{n} = 1$$

$\therefore \quad \boxed{\int_1^2 (4x - 5)\,dx = 1}$ (tener presente que si $\mu(P) = 1/n \to 0 \Rightarrow n \to \infty$)

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Dada la función **f / f (x) = x + 4**, dada la partición **P_7 = { –3, –3/2, –1/2, 1, 3/2, 5/2, 4, 5 }** del intervalo **[–3 ; 5]**, y el aumento de la partición **T_7 = { –2, –1, 0, 1, 5/2, 7/2, 9/2** }, se pide:

a) Calcular la Suma de Riemann.

b) Representar gráficamente la función, señalando los rectángulos cuyas áreas son los términos de la Suma de Riemann.

c) Calcular por definición $\int_{-3}^{5}(x+4)\,dx$, considerando como t_i los extremos izquierdos de cada subintervalo de la partición.

d) Comparar los resultados obtenidos en los incisos **a)** y **c)** consignando las observaciones.

2.- Analizar si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones. Sin resolver las integrales, justificar su respuesta:

a) $\int_2^0 x^2\,dx \geq 0$ ☐

b) $\int_1^5 [x]\,dx$ es una integral definida ☐

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx < 0$ ☐

d) f(x) = $\frac{3}{x-2}$ es una func. integrable en el intervalo [2;3] ☐

e) $2\int_0^1 (x^4 - x^2)\,dx \;\geq\; \int_{-1}^1 (x^4 - x^2)\,dx$ ☐

f) Si **f** y **g** son contínuas en [a;b], entonces: $\int_a^b \{f(x).g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx\,.\int_a^b g(x)dx$ ☐

g) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} (x^2 + \cos x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (x^2 + \cos x)dx$ ☐

h) $\int_4^7 (x-1)dx \geq \int_4^7 \left(-\frac{1}{3}x + 3\right) dx$ ☐

3.- Si se sabe que la función:

a) **g(x)** es una función **impar**, con: $\int_6^4 g(x)dx = 2$ y $\int_{-4}^9 g(x)dx = 5$, hallar: $\int_6^9 g(x)dx$

b) **h(x)** es un función **par**, con: $\int_{-5}^{11} h(x)dx = 14$ y $\int_5^{11} h(x)dx = 4$, hallar: $\int_0^5 h(x)\,dx$

4.- Calcular las siguientes integrales, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow):

a) $\int_{-3}^4 (2x-3)dx$

b) $\int_{-2}^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x\right) dx$

c) $\int_1^3 \frac{3}{x+4} dx$

d) $\int_{-1}^4 |x-3|dx$

e) $\int_0^5 x\sqrt{(x^2+4)}\,dx$

f) $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

5. – Hallar, en cada caso, la derivada solicitada:

a) H'(x) si $H(x) = \int_{x^2}^{2} (t^3 + 5^t + e^t)dt$ b) $\frac{dF}{dx}$ si $F(x) = \int_{5}^{\ln x} \cos t \, dt + \int_{\sin\frac{\pi}{6}}^{4} t^{2t} \, dt$

b) $\left[\int_{5x}^{x^5} \text{sen t dt}\right]'$ d) $\frac{d}{dx}\left[\int_{2^x}^{\cos x} t^2 \, dt\right]$

e) $f'(x)$ si $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\text{tg}\,x} (t^3 - 3t) \, dt$ f) $f'(t)$ si $f(t) = \int_{t^2}^{\sqrt[3]{t}} \frac{x^5}{\ln x} \, dx$

6.- Completa con la respuesta correcta y justifica:

a) La ecuación que relaciona las integral definida $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$ con la integral indefinida $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ es………

b) Si **h** es la tasa de crecimiento de una población **p** en el tiempo **t**, y **p = g (t)**, entonces $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{h(t)\,dt}$ = ………………………….. y representa ………………………………………………………………………….

c) Si en el instante **t** se fuga aceite de un tanque a razón de **r** litros por minuto y **r = g(t)** , entonces $\int_0^{120} \boldsymbol{g(t)dt}$ = ……………………… y representa ………………………………………………………

d) Si **f´(x)** es continua en **[-2;5]**, entonces $\int_1^3 \boldsymbol{f'(v)dv}$ =………………………………………………………

e) Si $\boldsymbol{2\int_a^x f(t)\,dt = 2\,sen\,x - 1}$, entonces **f (t) =** ………………………….. y **a =** ……………………….

7.- Calcula las siguientes integrales definidas, proponiendo una solución por sustitución o por partes:

a) $\int_1^{3^2} \frac{\sqrt{\log_3 x}}{x} dx$ b) $\int_1^4 x.\ln x \, dx$ c) $\int_0^3 3.x^2.3^{x^3} dx$

d) $\int_1^4 x^3.\sqrt{x^4 - 3} \, dx$ e) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\text{sen}\, x \, dx$

8.- Completa con los extremos correspondientes para que la proposición sea Verdadera:

a) si: $\boldsymbol{z = x - 2}$ entonces: $\int_{-1}^{2} \boldsymbol{(x-2)^4 dx} = \int_{.....}^{.....} \boldsymbol{z^4 dz}$

b) si: $\boldsymbol{u}$ =…….. y $\boldsymbol{du}$ =……. entonces: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \boldsymbol{\sin^6 x \cos x \; dx} = \int_{.....}^{.....} \boldsymbol{u^6 \, du}$

9.- Suponga que: $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$, **y que** $f''(x)$ **es continua.**

Encuentre el valor de: $\int_1^4 x.f''(x)dx$

10.- Demuestre que la gráfica de: $\boldsymbol{f(x) = -\int_0^x \frac{w}{\sqrt{w^2+4^2}} dw}$ **es cóncava hacia abajo en su dominio.**

11.- Hallar el valor de x **que minimiza la función:** $f(x) = \int_{x}^{x+3} (t-5)\,.\,t\,dt$

12.- Dada: $\boldsymbol{g(x) = \int_{0}^{x} (t+2)\,.\,t\,dt}$

a) ¿En qué intervalos es "creciente" **g(x)**?

b) ¿En qué intervalos es "decreciente" **g(x)**?

c) Analiza las concavidades de **g(x)**.

4) Ejercicios adicionales

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} \boldsymbol{f(x)dx}$, con f(x)= $\begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & si\ x < 0 \\ 2^{x} - 1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} \boldsymbol{f(x)dx}$, con f(x)= $\begin{cases} 2x + 1, & si\ x < 0 \\ \frac{5}{x} - 2, & si\ x \geq 0 \end{cases}$