○ Trabajo Práctico Nº 15 - bis: *Otros métodos para obtener Primitivas. Empleo de tablas de Integrales.*

> *"La mente que se abre a una nueva idea, jamás volverá a su tamaño original".*
>
> *Albert Einstein*

1) Cuestionario

a) **Explique el método de sustitución trigonométrica.**
b) **Describa en qué consiste el método descomposición en fracciones simples.**
c) **Indique cómo se aplica el método de descomposición en fracciones simples en el caso de raíces Reales y para el caso de raíces en el campo de los números Complejos.**

2) Ejercicio Resuelto

Calcule la siguiente integral utilizando el método de integración de funciones trigonométricas:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \ dx$$

Por la propiedad del **seno del ángulo duplo**, sabemos que:

$$2 \, . \, \text{sen } x \, . \, \cos x = \text{sen } (2x) \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x \, . \, \cos x = \tfrac{1}{2} \text{ sen } (2x)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos que:

$$\Rightarrow \quad \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x = \tfrac{1}{4} \text{ sen}^2 (2x)$$

Reemplazando en la integral inicial:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \ dx = \int \tfrac{1}{4} \sin^2(2x) \ \mathrm{dx} = \tfrac{1}{4} \int \sin^2(2x) \ dx \qquad A$$

Por la propiedad del **seno del ángulo mitad**, sabemos que:

$$\text{sen}^2 \left(\tfrac{x}{2}\right) = \tfrac{1}{2} [\, 1 - \cos (x) \,] \ \Rightarrow \ \text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} [\, 1 - \cos (2x) \,] \ \Rightarrow \ \text{sen}^2 (2x) = \tfrac{1}{2} [\, 1 - \cos (4x) \,]$$

Si sustituimos esta última expresión en la integral A obtenemos:

$$\tfrac{1}{4} \int \sin^2(2x) \ dx = \tfrac{1}{4} \int \tfrac{1}{2} [\, 1 - \cos (4x) \,] \ dx = \tfrac{1}{8} \int [\, 1 - \cos (4x) \,] \ dx$$

Aplicando el método de descomposición:

$$\frac{1}{8}\int [1 - \cos(4x)]\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx$$

Resolviendo este último término:

$$\frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + C$$

Reordenamos y escribimos la Respuesta:

$$\boxed{\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Calcular las siguientes integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas:

a) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$ b) $\int \operatorname{tg}^4(7x)\, dx$ c) $\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$

d) $\int sen(5x)\cos(9x)\, dx$ e) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$ f) $\int \frac{dy}{\operatorname{senh}^4 y}$

2.-Calcular las siguientes integrales utilizando sustitución trigonométrica:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$ b) $\int \frac{1}{y}\frac{ln^3 y}{\sqrt{ln^2 y-4}}dy$ c) $\int \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{(1+z^2)^{3/2}}dz$ d) $\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}\, dt$

3.- Calcular las siguientes integrales de funciones racionales, empleando el método de reducción a fracciones simples:

a) $\int \frac{4x+10}{x^2-2x}\, dx$ b) $\int \frac{dy}{y^2(y^2-y)}$ dy c) $\int \frac{z(z^2-2z)}{z^2-3z-10}dz$ d) $\int \frac{2w^4+11w^3+14w^2-w-4}{w^3+4w^2}\, dw$

4.- Hallar la fórmula de la función ***f***, sabiendo que:

a) $f'(x) = \cos^2 x + \dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$ y que el punto $(\pi/4, 9/4) \in G_f$.

b) La pendiente m_t de la recta tangente al gráfico de ***f*** en todo punto, responde a la fórmula**:**

$$m_t = \frac{-7x-8}{x^3+3x^2-4x} \qquad \text{y que:} \qquad f(2) = \ln 24$$

5.- Un punto material se mueve en línea recta, con una velocidad ***v(t) = cos (3t) sen (4t)***. Determinar la función posición ***s = f(t)***, si la posición inicial era de 1 cm a la derecha del punto de referencia. El tiempo está expresado en segundos.

6.- Calcular las siguientes integrales por el método de reducción a fracciones simples:

a) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\, dx$ b) $\int \frac{15-x^2}{(1+x^2)(x^2+9)}\, dx$

c) $\int \frac{1-5x+3x^2+4x^3+4x^5}{(1+x^2)x}\, dx$ d) $\int \frac{2x^2+5}{(x^2+4)(x^2+1)}\, dx$

7.- Resolver las siguientes integrales aplicando alguno/s de los métodos vistos:

a) $\int \frac{tg\, x+sen\, x}{\sec x}\, dx$ b) $\int x^3\sqrt{x^2+4}\, dx$ c) $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x}\, dx$

d) $\int ln\sqrt{x+1}\, dx$ e) $\int \frac{arctg\, x}{x^2}\, dx$ f) $\int \frac{x^4-8}{x(x^2+2)}\, dx$

4) Ejercicios adicionales

Resolver:

a) $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{w}{7}\right)\cos^2\left(\frac{w}{7}\right) dw$ b) $\int \operatorname{senh}^2\left(\frac{z}{5}\right)\cosh^3\left(\frac{z}{5}\right) dz$ c) $\int x^2\, \cosh x\, dx$

d) $\int tg^3 x\, dx$ e) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$