Trabajo Práctico Nº 14: *La función primitiva.*

Todos somos muy ignorantes.
Lo que ocurre que no todos ignoramos las mismas cosas.
Albert Einstein

1) Cuestionario

a) ¿Cuál es el proceso inverso al de derivar?
b) Defina primitiva o antiderivada de una función
c) ¿Qué notación utiliza para indicar la primitiva de una función?
d) Confeccione una lista con las primitivas elementales

2) Ejercicio Resuelto

1.- Determinar la fórmula de la función f(x) conociendo los siguientes datos:

$F''(x) = x^2 + 3 \qquad f'(0) = 2 \quad (1) \qquad f(0) = 1 \quad (2)$

Solución

Obtenemos f ' (x): $\Rightarrow$ $f'(x) = \int (x^2 + 3)\, dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C$

a fin de calcular el valor de C, utilizamos los datos dados en **(1)**:

$f'(0) = 2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 2$

Por lo tanto: $f'(x) = \frac{x^3}{3} + 3x + 2$

Obtenemos a continuación f (x): $f(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + 3x + 2\right) dx = \frac{x^4}{12} + 3\,\frac{x^2}{2} + 2x + C.$

Utilizando los datos dados en **(2)** tendremos: $f(0) = 1 = 0 + 0 + 0 + C \Rightarrow C = 1$

Finalmente:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1}$$

2.- Hallar la ecuación de una curva sabiendo que la misma pasa por el punto (1 , 1) y que la recta tangente en cada punto x tiene pendiente m = 4x + 3.

Solución

Tendremos que $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$ **, por lo tanto** $dy = (4x + 3)\,dx$

Aplicando integrales en ambos miembros resulta:

$$\int dy = \int (4x + 3)\,dx \Rightarrow y = 2x^2 + 3x + C \quad \mathbf{(3)}$$

Como la curva pasa por el punto (1 , 1) , se verifica que f (1) = 1

$\therefore$ **reemplazando en (3)** $1 = 2 + 3 + C \Rightarrow C = -4$

Por lo tanto la fórmula de la función pedida es: $\boxed{y = 2x^2 + 3x - 4}$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Verifique las siguientes igualdades:

b) $\int \frac{\frac{3}{2}x^2+1}{\sqrt{x^3+2x}}\,dx = \sqrt{x^3+2x} + C$

c) $\int \left[7^x \ln 7 - 7x^6 + \frac{\cos(\ln x)}{x}\right] dx = \operatorname{sen}(\ln x) - x^7 + 7^x + C$

d) $\int \left[\left(\operatorname{cotg} 3x + \operatorname{tg}\frac{1}{3}x\right) + e^{\frac{1}{2}x}\right] dx = \frac{1}{3}\ln(\operatorname{sen} 3x) - 3\ln\cos\frac{1}{3}x + 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

e) $\int \left[21x^6\, sen^2(x^7-2) cos\,(x^7-2) - \frac{7^x ln7}{7^x+2}\right] dx = \operatorname{sen}^3(x^7-2) - \ln(7^x+2) + C$

f) $\int \left[\sec^2\frac{1}{2}x + x^2 e^{x^3} + \frac{x^2}{1-x}\right] dx = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}e^{x^3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \ln(1-x) + C$

g) $\int \left[3^{x^2} 6^{x^3+3} \ln 6 - \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\right] dx = 6^{x^3+3} + \operatorname{sen}(\cos x) + C$

2.- Encuentre $f(x)$ **si se sabe que:**

a) $\int f(x)\,dx = \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$

b) $\int f(x)\,dx = (x^3-1)\cos x + C$

c) $\int f(x)\,dx = \frac{x+\operatorname{tg} x}{\ln x} + C$

3.- Determinar la fórmula de cada función conociendo los siguientes datos:

a) $f''(x) = 6x^3 + 4\cos x + 2$ $\quad f(0) = -1\ ;\ f'(0) = -4$

b) $f''(x) = 60x^3 - 12x^2 + 6x$ $\quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$

c) $y\,dx - dy = -y\,x^2\,dx$ $\quad y(1) = 1$

4.- Determine la ecuación de la curva f **de manera que** $f'(x) = x^2$ **y además que** $y = 4x + 7$ **sea una recta tangente a la gráfica de** f.

5.- Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto dado sea igual y opuesta al triple de la abscisa en dicho punto. Determinar la curva que pasa por *(1 ; 2)*.

6.- Accidentalmente se deja caer una maceta desde el balcón de un edificio, y choca contra el piso a los *4 segundos* **de haber iniciado la caída. ¿A qué altura se encuentra el balcón?**

7.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(3;5)$ **y en dicho se punto se cumple que la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto está dada por** $m = \frac{x^2+1}{xy}$ **.**

8.- Desde un globo en reposo situado a una altura de *3 kilómetros* **sobre la tierra, se lanza un objeto verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de** *10 m/seg.* **Suponiendo que la aceleración de la gravedad** g **es** *9,8 m/seg*^{2}**, hallar la posición del objeto y su velocidad** *15 segundos* **después de iniciado el descenso.**

9.- Un jugador de jockey sobre hielo lanza el tejo en línea recta hacia el arco contrario, aplicándole un golpe por el cual adquiere una velocidad inicial de *18m/seg*. **Por acción del rozamiento sobre la superficie horizontal del hielo, la velocidad del tejo disminuye a razón de** *3m/seg*^{2}. **Si al momento del disparo el arco está a** *54m* **del lugar de lanzamiento, habrá convertido el gol?**

10.- Una varilla metálica tiene una longitud de *3 metros*. **Su densidad lineal, que se mide en** *kg/m*, **está dada por la función** $\delta(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, **donde** x **se mide en** *metros* **desde uno de los extremos de la varilla. Determinar cuál es la masa total del objeto.**

11.- La ley de crecimiento de una bacteria está dada por la expresión $\frac{dN}{dt} = 0{,}5N$. **Sabiendo que inicialmente** *N = 300 bacterias*, **hallar cuál será el numero al cabo de** *5 horas*, **estando el tiempo expresado en dicha unidad.**

12.- Calcular las siguientes integrales aplicando el método de descomposición:

a) $\int \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - x^4 dx$

b) $\int (2^{t+2} + \cosh t - e^t)\ dt$

c) $\int \left(z^3 + \sqrt{z}\right) . z^{3/2}\, dz$

d) $\int \frac{3w^5+5w^3-7}{2w^2}\ dw$

e) $\int \frac{(5-x)^3(e^y+1)(2+e^4)}{3\sqrt[3]{x^2}}\ dy$

f) $\int \left(2 - 3x^3\sqrt[3]{x^2} + 4\cos x - 5x^4\right)\ dx$

4) Ejercicios adicionales

1.- Resolver:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5t^3+1}{h}$$

2.- Proponga al menos tres soluciones para y= f(x) y grafíquelos en el mismo par de ejes coordenados sabiendo que:

$$\frac{dy}{dx} = -2x + 4$$

3.-) La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dado por la expresión:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{-10}{(t)^{3}}$$

en metros por segundo al cuadrado, encuentre la fórmula de la velocidad v(t) si se sabe que en t=1 su velocidad es 4 m/s, determine la velocidad a los 3 segundos.

4.-) LOS CAMPOS DE PENDIENTES: Emplea la información del siguiente texto para responder a los ejercicios que se presentan a continuación del mismo:

La Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO): $\frac{dy}{dx}=f(x)$

nos informa que f **es la derivada de una función desconocida** g **tal que** $y=h(x)$.

Si tenemos presente que la derivada se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a h **en todo punto** $(x\,;y)$ **del plano en el dominio de** h **; entonces se puede tomar una grilla de puntos en el plano y trazar en cada uno de esos puntos un mini segmento con la inclinación que nos informa** f.

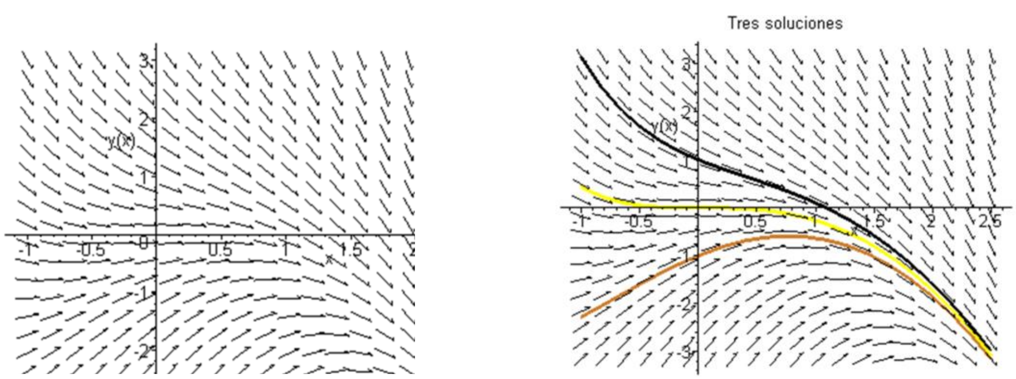
La representación gráfica que se obtiene siguiendo este procedimiento se le llama campo de pendientes. Las soluciones de la EDO son las ecuaciones de las curvas que tienen las tangentes que indica el campo de pendientes y se podrá esbozar (obtener una gráfica aproximada) de las soluciones siguiendo las direcciones indicadas por el campo de pendientes.

Si en la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

conocemos la función f **podemos conocer el valor de la pendiente a la gráfica solución en cada punto** $(x\,;y)$ **del plano en el dominio de** f.

Si en cada punto seleccionado se dibuja una mini tangente obtenemos un campo de pendientes o campo de direcciones. Cuando se han obtenido gran cantidad de estas marcas, se puede visualizar las soluciones trazando una curva suave.

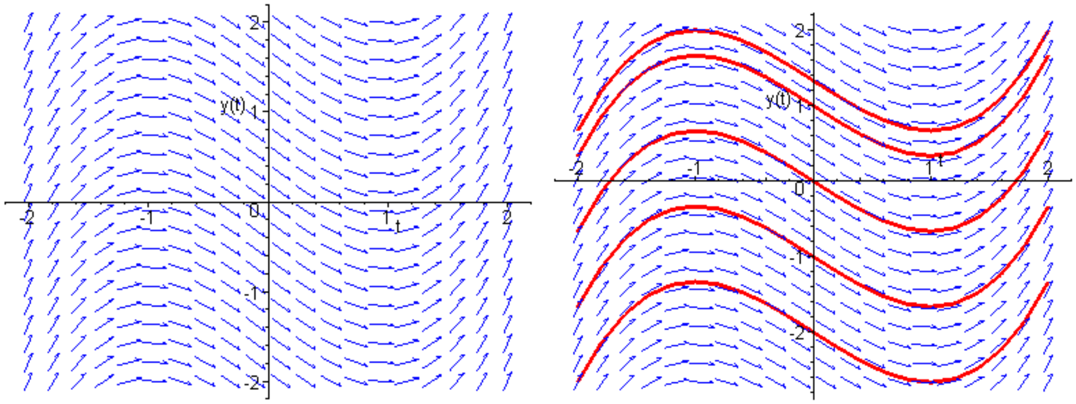
Evidentemente el esbozo de un campo direccional es mucho más fácil si usamos la computadora. Mostramos la siguiente figura donde se ha usado los comandos *dfieldplot y phaseportrait* del software de matemática Maple 6, como se observa en la siguiente figura:



Una versión generada por computadora del campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dx=-y-x^{2}$ **y las gráficas de tres soluciones de la ecuación superpuestas sobre su campo de pendientes.**

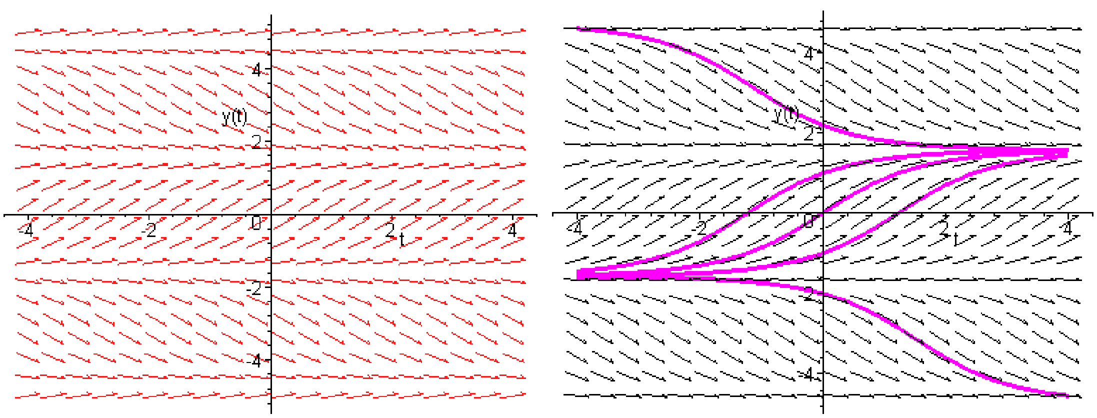
Para la EDO: $\frac{dy}{dt}=t^{2}-1$

la función que define la inclinación de las mini tangentes en cada punto $(t\,;y)$ depende de t, entonces las tangentes tienen la misma inclinación, para un valor fijo de t, cualquiera sea y, tal como se observa en la figura:



Una versión generada por computadora del campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dt = t^2 - 1$ **y las gráficas de soluciones de la ecuación superpuestas sobre su campo de pendientes.**

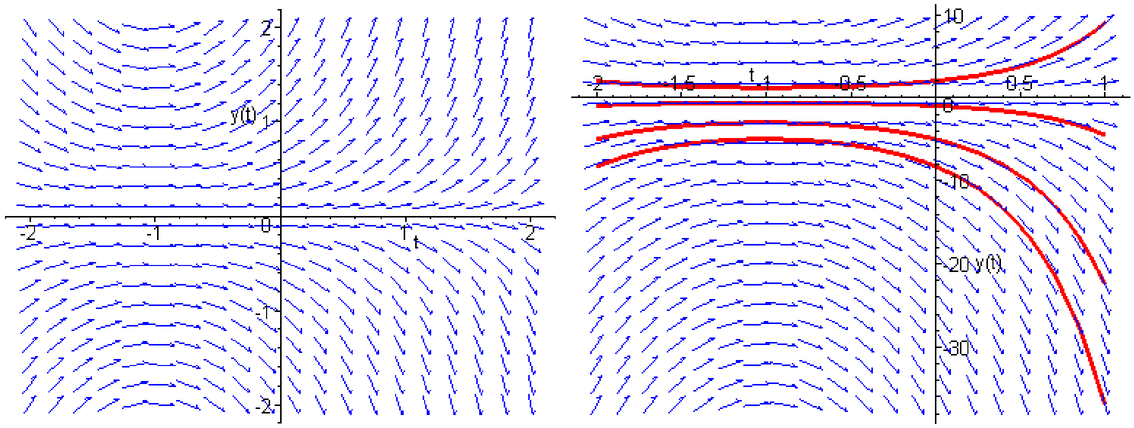
La función que define la inclinación de las mini tangentes en cada punto (t, y) depende de y, entonces las tangentes tienen la misma inclinación, para un valor fijo de y, cualquiera sea t, según se observa en la figura siguiente:



Una versión generada por computadora del campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dt = \cos y$ **y las gráficas de soluciones de la ecuación superpuestas sobre su campo de pendientes.**

Para el siguiente caso, la inclinación de las mini tangentes depende de las dos variables:

$$\frac{dy}{dt} = y\,(t+1)$$



Una versión generada por computadora del campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dt = y\,(t+1)$ **y las gráficas de soluciones de la ecuación superpuestas sobre su campo de pendientes.**

Responde en base al texto anterior los ejercicios que se presentan ahora:

a) Los campos de pendientes siguientes corresponden a las ecuaciones diferenciales

$$\text{(i)} \quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{dy}{dx} = -y \qquad \text{(iii)} \quad \frac{dy}{dx} = e^{-0{,}01\,xy}$$

Identifica cuál es el campo de pendientes asociado a cada una de las ecuaciones dadas y justifica los motivos de cada elección.

Informa respecto a las características de las soluciones de las ecuaciones diferenciales en base al campo de pendientes.

¿ Puedes esbozar la forma de esas soluciones ? ¿ Podrías dar un esbozo de la solución que pasa por $(0\,;\,0)$ **?**

GRAFICO A

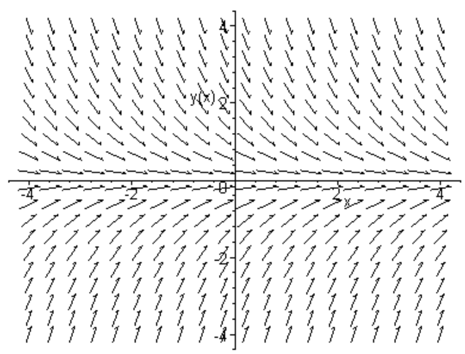


GRAFICO B

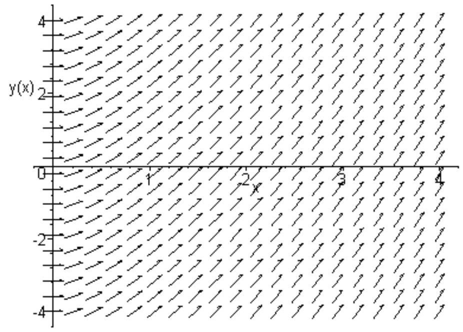
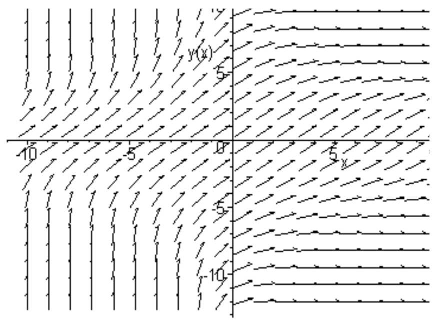


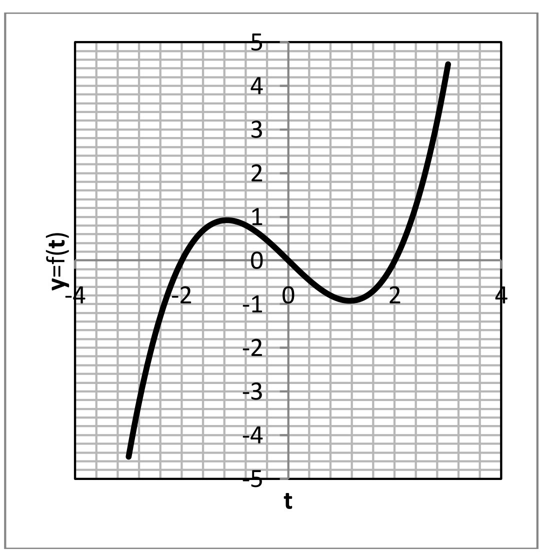
GRAFICO C



b) Dibuja el campo de pendientes para $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 - 1$

Comienza con una red de puntos $(x;y)$ **con** $x = \{-2,-1,0,1,2\}$ **e** $y = \{-2,-1,0,1,2\}$. **Luego agrega más marcas de pendientes a otros puntos del plano x-y. Emplea el campo obtenido para dibujar la curva solución que pasa por el origen.**

c) Dada la gráfica de f **tal que** $\frac{dy}{dt} = f(t)$**. Traza un croquis del campo de pendientes de esta EDO.**



d) Dada la gráfica de f **tal que** $\frac{dy}{dt} = f(y)$, **traza un croquis del campo de pendientes de esta EDO:**