Trabajo Práctico Nº 13: *Problemas de optimización de funciones. Construcción de la gráfica de una función.*

Las cosas pierden, al ser poseídas, todo el valor que tuvieron al ser deseadas, porque el deseo es un artista engañador y mentiroso.

Ricardo León.

Los pasos sugeridos para resolver problemas de optimización

- ***INTERPRETA*** Lee atentamente y visualiza reuniendo la información en un esquema. Identifica variables independiente y dependiente
- ***ESQUEMATIZA*** Mediante un dibujo, un gráfico o un esquema, que muestre o refleje la situación planteada
- ***EXPRESA LA FUNCION A MAXIMIZAR O MINIMIZAR*** Encuentra relaciones entre las variables y propone una fórmula o modelo. Trata de obtener una función de una variable
- ***IDENTIFICA EL DOMINIO*** En el contexto del problema, obtiene los valores de la variable independiente para el cual el modelo tiene sentido
- ***OBTIENE LOS VALORES CRÍTICOS DE LA FUNCIÓN*** Si llamamos **f** a la función propuesta, plantea la ecuación $f´(x) = 0$ y obtiene los números que la cumplen. Observa si no existe $f´(x)$ para algún valor en el dominio de **f**.
- ***OBTIENE Y CLASIFICA LOS EXTREMOS*** Emplea los criterios de la derivada primera o de la derivada segunda para identificar si los valores críticos obtenidos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo. Recuerda que el extremo buscado puede estar en la frontera si el dominio de la función es un intervalo cerrado.
- ***ESCRIBE LA RESPUESTA***

Ing. Tito Ramón Villagra (Prof. Adj.) - Ing. José Luis Fernández (JTP)

1) Cuestionario

a) **¿Qué tipo de extremos de una función conoce? Defínalos.**
b) **¿Qué diferencia hay entre extremos absolutos y extremos relativos?**
c) **Defina máximo y mínimo relativo de una función.**
d) **Defina máximo y mínimo absoluto de una función.**
e) **Defina punto crítico.**
f) **Indique los pasos a seguir para obtener los extremos relativos de una función.**
g) **Defina concavidad de una curva**
h) **Indique los pasos a seguir para obtener los intervalos de concavidad**

2) Ejercicio Resuelto

1.- Encontrar dos números cuyo producto sea máximo y su suma sea 24.

Recordemos cuáles son los Pasos sugeridos para resolver Problemas de Optimización:

Entender el problema. El primer paso consiste en leer cuidadosamente el problema hasta que esté claramente entendido. Hay que preguntarse**:** ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones establecidas?

***Trazar un esquema*.** En la mayoría de los problemas es útil dibujar un esquema que refleje la situación planteada

***Identificar variables y constantes: Introducir símbolos*.** Identificar la variable a optimizar, las demás variables y constantes del problema. Asignar un símbolo a dichas variables. Puede ser útil emplear las letras iniciales como símbolos, por ejemplo A para área , d para distancia, t para tiempo. Marcar en el esquema realizado en el paso anterior estos elementos.

Expresar la variable a optimizar (la llamaremos A) en términos de los otros elementos indicados en el paso 3

***Expresar la variable a optimizaren función de una sola variable*.** Si en el paso anterior se ha expresado A en función de más de una variable, usar la información dada para obtener relaciones (en forma de ecuaciones) entre esas variables. Luego utilizar esas ecuaciones para eliminar todas excepto una de las variables en la expresión de A, de manera que ésta quede en función de una sola variable, es decir debemos obtener A = f (x).

***Determinar los extremos absolutos de f*:** Obtener los puntos críticos de f y luego utilizar alguno de los criterios (variación del signo de la derivada primera o estudio del signo de la derivada segunda) para determinar cuáles de ellos corresponden a extremos relativos de f. Entonces, determinar el extremo absoluto solicitado en el problema.

Escribir la respuesta

Solución

Llamamos x e y a ambos números. Los dos números deben ser positivos porque si fuesen negativos, entonces la suma no podría valer 24. Por otro lado, si uno de ellos fuese negativo y el otro positivo, el producto sería negativo y como consecuencia no sería máximo. Es por ello que $x > 0$ e $y > 0$ **(1)**

La función a maximizar, P, es el producto de ambos números.

Además tenemos los datos**:** $x + y = 24$ **(2)** y $P(x, y) = x \cdot y$ **(3)**, pero el producto depende de dos variables**:** x e y

Como la función a maximizar debe depender de una sola variable, utilizamos la ecuación dada en **(2)**para despejar una de las variables, por ejemplo la variable y**:** $x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$ **(4)**, luego reemplazando en **(3)**

$$P(x) = x(24 - x) = 24x - x^2 .$$

Para calcular Dom (P) tenemos en cuenta que**:** $x > 0$ por **(1)** ; $y = 24 - x > 0$ por **(4)** y por **(1)** $\Rightarrow 0 < x < 24$

$$\therefore \text{Dom}(P) = (0, 24)$$

Siguiendo los pasos vistos en el ejercicio anterior se procede a determinar los extremos absolutos:

$P'(x) = 24 - 2x = 0 \Rightarrow x = 12$; este será un punto crítico, todavía no se sabe si se trata de un máximo o de un mínimo relativo.

Aplicando el criterio de la derivada segunda**:** $P''(x) = -2$ y como $P''(12) < 0$ nos indica que en $x = 12$ hay un máximo relativo.

El extremo absoluto no puede estar en 0 ni en 24 pues el producto sería cero, entonces como la función es continua, el máximo absoluto coincidirá con el máximo relativo.

Uno de los números es $x = 12$ y reemplazando este valor en **(4)**, obtenemos $y = 12$.

Por lo tanto los números cuyo producto es máximo y su suma es 24 son: **x = 12** e **y = 12**.

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Una industria planea cercar un terreno de 400 m^2 con alambre tejido, para destinarlo a depósito de diferentes tipos de caños. El terreno debe alambrarse en su exterior, y además debe dividirse en dos partes iguales colocando un alambrado adicional, paralelo a dos de sus lados. Calcular cuáles son las dimensiones del terreno que minimicen la cantidad de alambre tejido.

2.- Encuentre el punto $(x; y)$ sobre la recta $x + y = 1$ que está más cerca del punto $(2; 3)$.

3.- Hallar dos números cuya suma sea 40, de manera que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea mínimo.

4.- Demuestre que el rectángulo cuya área es 196 y cuyo perímetro es mínimo es un cuadrado.

5.- Una página impresa debe tener 2 pulg de margen izquierdo, y 1 pulg en los márgenes derecho, superior e inferior. Si el área de la superficie impresa es de 30 pulg^2, calcular las dimensiones de la página de manera que se utilice la menor cantidad de papel.

6.- Encuentre dos números cuya resta de 6 y su producto sea mínimo.

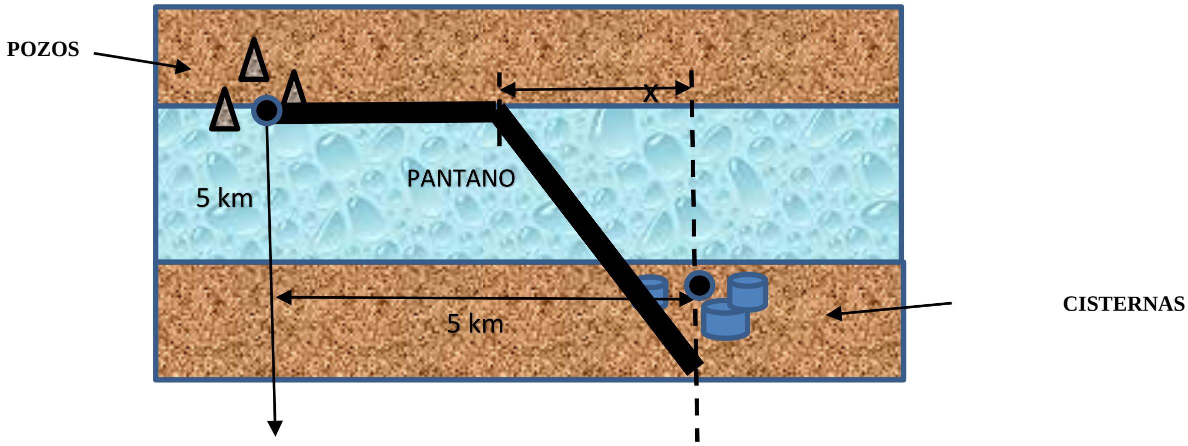
7.- Se debe construir una caja cerrada de cartón, con forma de prisma recto. El fondo (y la tapa) deben tener forma rectangular, cuya longitud sea el doble de su ancho. El volumen de la caja debe ser 1944 in^3. Determine las dimensiones de la caja que minimicen el área de cartón a utilizar.

8.- En un día determinado, la velocidad de flujo F (en automóviles por hora) en una via congestionada es $F = \frac{v}{22+0{,}22v^2}$ donde v es la velocidad del tráfico en millas por hora, Que velocidad maximiza el flujo en esa vía?

9.- Se diseña un recipiente de forma cilíndrica (sin tapa) con un volumen de 200 litros. La materia prima para la base del recipiente (más reforzada) tiene un costo de $250 por cm^2, y el costo del material para la superficie lateral es de $120 por cm^2. Calcular las dimensiones del recipiente que minimicen el costo total del material a utilizar.

10.- Para transportar sustancias peligrosas se diseña un contenedor y, por el tipo de sustancia, se decide fabricarlo de un plástico especial de alta densidad. El recipiente se diseña a partir de dos hemisferios unidos a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del contenedor es de 2600 cm^3. El costo del material por cm^2 para los extremos duplica al costo del plástico por cm^2 utilizado para la superficie cilíndrica. Calcular las dimensiones del contenedor de manera que el costo total del material a utilizar sea mínimo.

11.- Se planifica construir una tubería desde una zona de pozos de petróleo hasta la zona donde se encuentran las cisternas de almacenamiento (ver figura). Sobre el pantano el costo de construcción es de $50.000 por kilómetro, y sobre la tierra el costo de construcción de $30.000 por kilómetro. ¿Cómo debe construirse la tubería para que el costo de construcción sea mínimo?

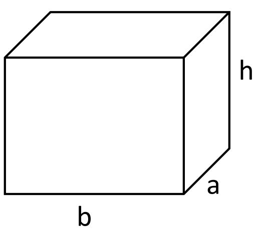


12.- Realiza el estudio completo para obtener los gráficos de las funciones cuyas formulas se indican a continuación:

a) $y = 2 - \frac{x^2}{x^2-1}$ **b)** $y = \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)^3$ **c)** $y = \frac{x^2+x-2}{x-1}$

4) Ejercicios adicionales

1.-



Completar los puntos suspensivos para obtener un enunciado verdadero:

Se quiere fabricar una caja que tenga forma de paralelepípedo rectangular y cuyo volumen sea máximo. El ancho (a) de la caja debe ser el cuádruple del largo (b) y además la suma del ancho más el largo más el alto (h) debe ser igual a un metro. Entonces

a) La función a maximizar es**:** ……………………………………………

b) Las medidas de la caja serán a = ……..…. , b = ……. , h =………

2.- Dos ciudades A y B van a tener su abastecimiento de agua de una misma estación de bombeo que se ubicará en la ribera de un río, que se puede considerar recto. El río se encuentra a 15 Km de la ciudad A y a 10 Km de B. Se sabe que los puntos del río más cercanos A y B se hallan separados por 20 Km y además que A y B están del mismo lado del rio. ¿Dónde deberá instalarse la estación de bombeo de manera de utilizar la menor cantidad de cañería?