○ Trabajo Práctico Nº 12: *La derivada y la gráfica de una función.*

Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama.
Aristóteles.

1) Cuestionario

a) Confeccione una lista de chequeo con los pasos a seguir para trazar el gráfico de una función

b) Explique con sus propias palabras el significado de:

- **Raíces**
- **Ordenada al origen**
- **Monotonía**
- **Extremo Relativo**
- **Extremo Absoluto**
- **Punto de inflexión**
- **Concavidad**
- **Asíntota**

2) Ejercicio Resuelto

1.- Grafique la función f / $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$**, realizando el estudio completo.**

Solución

a) Dominio**:** $R - \{-1, 1\}$

b)Continuidad**:** Por ser cociente de polinomios, la función es continua en su dominio,

c) Paridad**:** $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2 - 1} \neq f(x)$

$-f(x) = -\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{-x^3 + 1}{x^2 - 1} \neq f(-x) \quad \therefore$ No tiene paridad.

d) Intervalos de monotonía**:** Se necesita determinar la derivada primera.

$f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, para determinar los puntos críticos vemos donde $\nexists\ f'(x) \vee f'(x) = 0$

$\nexists\ f'(x)$ si $x = -1$; $x = 1$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = -2$

Los intervalos de monotonía, vendrán dados por**:**

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	−	−	+	+
f	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente	Creciente

e) Extremos relativos**:** En base al cuadro anterior podemos obtener los extremos relativos

x	y
-2	-3 (Mr)
0	1 (mr)
2	$7/3$
-3	$-7/2$
$-1/2$	$3/2$
$-3/2$	$-7/2$

	-2	-1	0	1
Extremos relativos	Máximo	No es extremo	Mínimo	No es extremo

f) Concavidad**:** se debe ver donde $\nexists\ f''(x) \vee f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - x(x+2)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\left(x^2+2x+1-x^2-2x\right)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

En $x = -1$ y $x = 1$ la derivada segunda no existe (tener presente que aunque $x = 1$ no surja de este análisis, también se debe incluir su valor pues $1 \notin$ Dom (f) y $1 \notin$ Dom (f ').

Los intervalos donde analizaremos la concavidad son**:** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ y analizando el signo de la derivada segunda se tendrá**:**

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de f ' ' (x)	Negativa	Positiva	Positiva
Concavidad	C. hacia Abajo	C. hacia Arriba	C. hacia Arriba

g) Punto de inflexión**:** En $x = -1$ hay un cambio en la concavidad, pero como para ese valor no está definida la función, entonces no hay punto de inflexión.

h) Asíntotas**:**Ya fueron calculadas en los ejercicios resueltos del T. P. Nº 15, ejercicio 3.

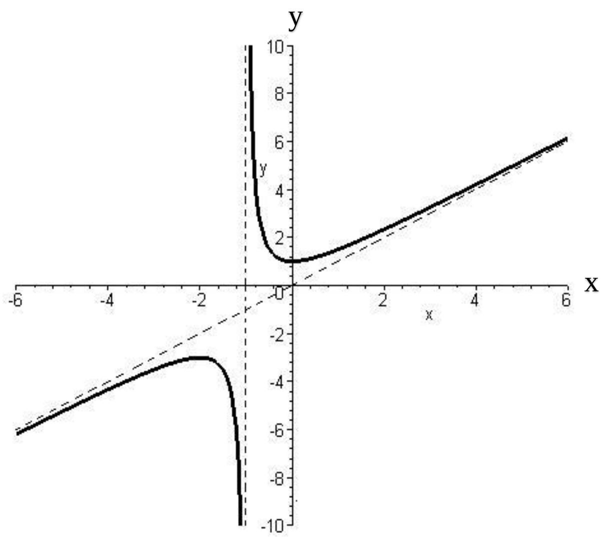
Corresponden a $x = -1$, asíntota vertical y como asíntota oblicua tanto derecha como izquierda**:** $y = x$

i) Intersección con los ejes**:**

Con el eje x**:** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = 0$, no hay intersección (tener presente que $1 \notin \mathrm{Dom}(f)$)

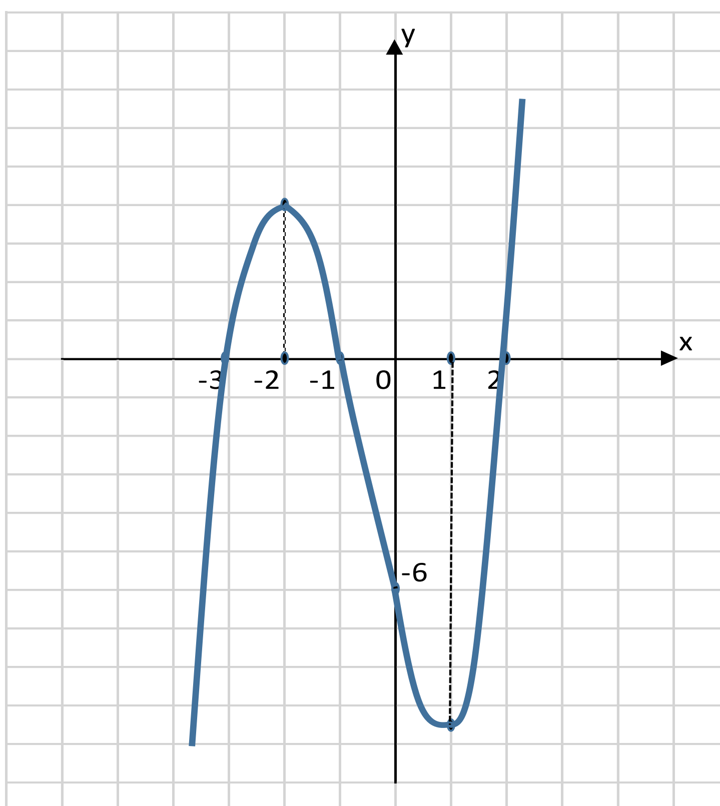
Con el eje y**:** $x = 0 \Rightarrow y = 1$

j) Tabla de valores y gráfico**:**



3) Ejercicios para resolver en clases

1.- a) Utilice el siguiente gráfico para determinar los intervalos de monotonía de la función $f(x)$**:**



b) Si la función f del punto anterior es $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 6$, verifique en forma analítica los intervalos de monotonía encontrados en el punto anterior.

2.- Determinar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones dadas por su fórmula:

a) $y = x^2 + 2x$ b) $y = 4x - 2x^2$

c) $y = -x^3 + x^2 + 6x$ d) $y = x^2 + 2/x$ e) $y = 2\sqrt[3]{x} + 3$

3.- Identifica y clasifica los extremos relativos de las funciones del ejercicio 1.

4.- Proponer una función que cumpla con todas las siguientes condiciones:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$, $f(-4) = 2$, $f(1) = 3$, $f(5) = 0$, $f'(1) = 0$, $\nexists f'(-4)$,

$f'^{(x)} > 0 \ en \ (-1; 1) \ y \ en \ (3; \infty)$, $f'^{(x)} < 0 \ en \ (-4; -1) \ y \ en \ (1; 3)$

b) $Dom(f) = \mathbb{R}$, $f(-6) = -4$, $f(-3) = f(3) = 3$, $f(6) = 7$, $\nexists f'(-3)$, $\nexists f'(3)$,

$\forall x \in [-3; 3] : f'^{(x)} = 0$, $f'^{(x)} < 0 \ en \ (-\infty; -6) \ y \ en \ (6; \infty)$,

$f'^{(x)} > 0 \ en \ (-6; -3) \ y \ en \ (3; 6)$

5.- Si $f'(x) = \frac{x-3}{x^2\,(2-x)}$, entonces los intervalos de monotonía de $f(x)$ son:

6.- Si $f\,'(x) = \frac{1}{2}(2 - x)(x + 3)$, entonces: (Selecciona la/s respuesta/s correcta/s)

i) f(-3) es un mínimo relativo

ii) f(-3) es un máximo relativo.

iii) f(-3) no es un extremo relativo

iv) f(2) no es un extremo relativo

v) f(2) es un mínimo relativo

vi) f (2) es un máximo relativo

7.- Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$ cuya fórmula es:

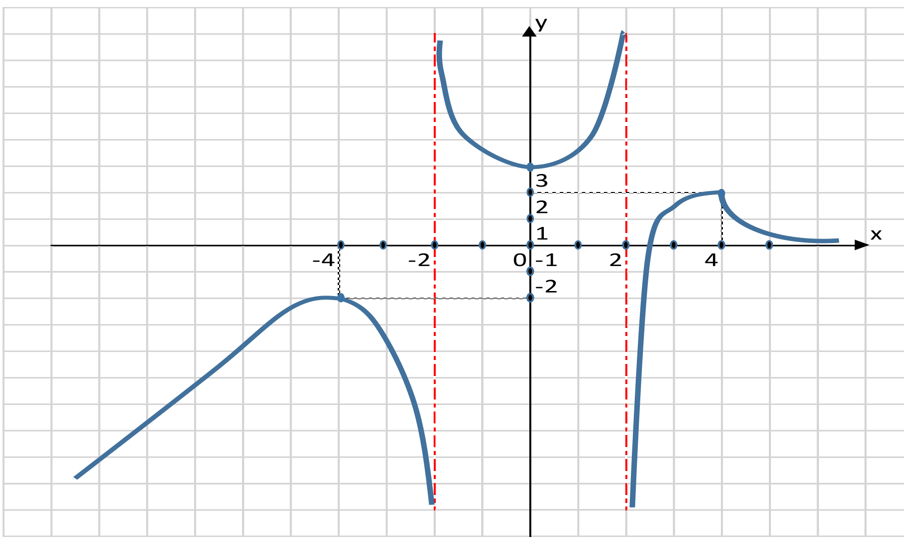
$$f(x) = 2x^5 + 2x^3 - 4x$$

8.- Si el Dom $(f) = \mathbb{R} - \{0; 4\}$ y $f''(x) = \frac{5+x}{x^2(x-4)}$, determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de la función $f(x)$.

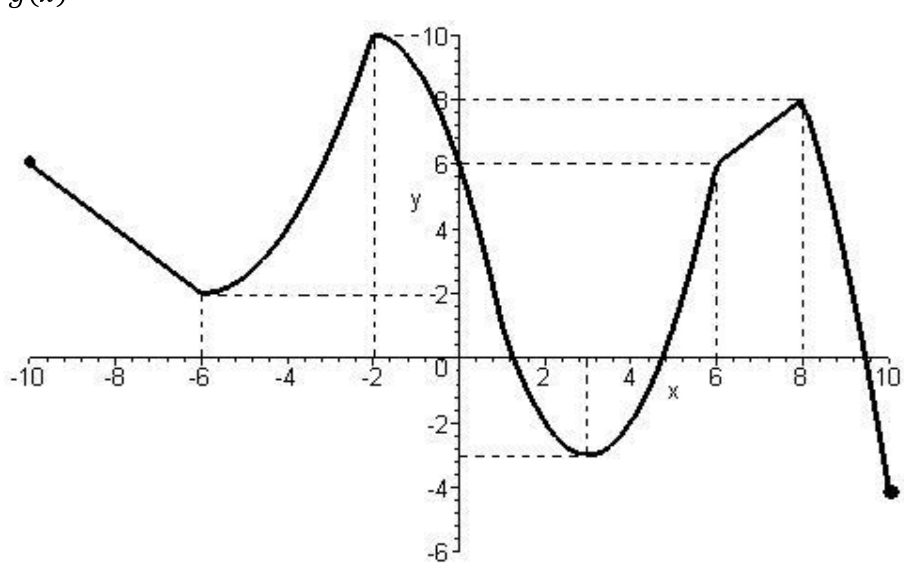
9.- Dadas las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, obtener en cada caso:

a) Dominio e Imagen de la función.
b) Los intervalos de monotonía, indicando el signo de la primera derivada.
c) El / los extremos relativos.
d) Para el grafico II) Si Dom (f) = [– 6 , 6], obtener los extremos absolutos.
e) Los puntos donde se anula la derivada primera.
f) Los puntos donde no existe la derivada primera.
g) Los intervalos de concavidad, indicando el signo de la segunda derivada.
h) El / los puntos de inflexión.
i) Los puntos donde se anula la derivada segunda.
j) Los puntos donde no existe f '' (x).
k) La ecuación de las asíntotas.

$\boldsymbol{I})\ f(x)$



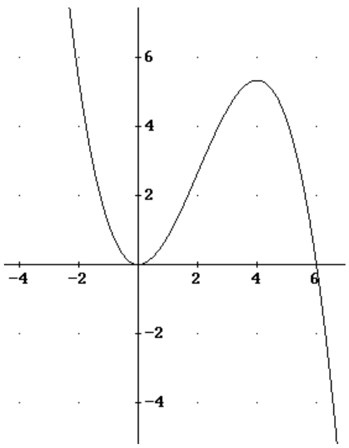
$\boldsymbol{II})\ g(x)$



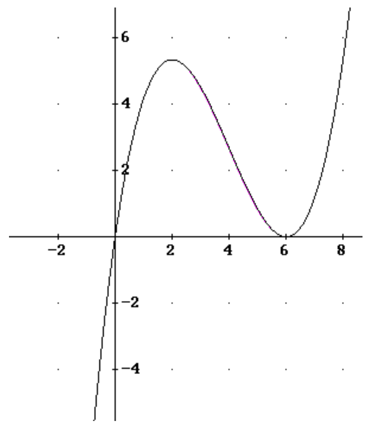
10.- Los gráficos de las figuras A), B) y C) corresponden a la función $f(x)$.

Indicar en los gráficos de las figuras 1), 2) y 3) cuál es la gráfica de su derivada.

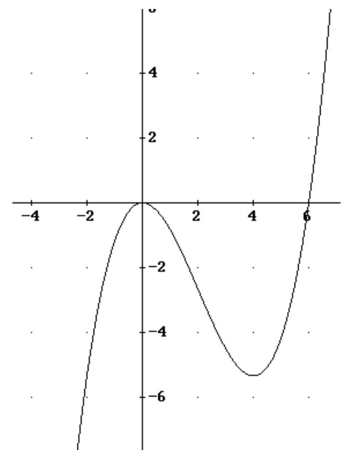
A)



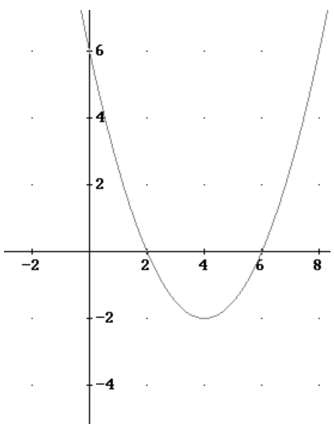
B)



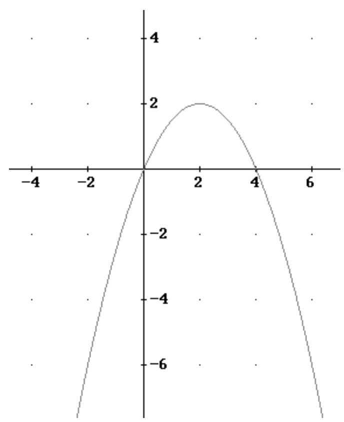
C)



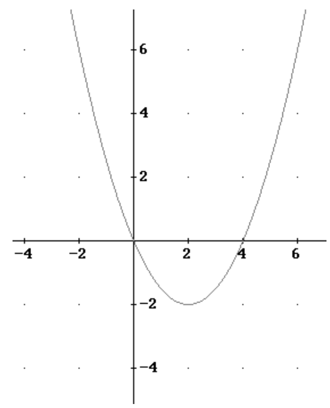
1)



2)



3)



11.- Dada la función $f'(x)$, construir en un mismo sistema de ejes la gráfica de $f(x)$ y de su derivada

a) $f'(x) = 2 - x$ **b)** $f'^{(x)} = (x-2)^2 + 1$

12.- Contesta por Verdadero o Falso y justifica:

a) **Si un objeto se desplaza con una aceleración a de modo tal que $a > 0$, entonces la velocidad v del objeto es decreciente.**

b) **Si una función diferenciable $f(x)$ alcanza un valor $Máximo$ en un punto interior c de su dominio, entonces $f'(c) \neq 0$.**

c) **Puede ocurrir que una función $f(x)$ definida en c verifique que $f'(c) = 0$ ó que $\nexists\, f'(c)$, y no presente un $Extremo\ Relativo$ en c.**

d) **Si $f''(c) = 0$, entonces $(c\ ;\ f(c))$ es un punto de inflexión.**

e) Si $f''(c) > 0 \ \forall x \in (a;b)$, **entonces la gráfica de** $f(x)$ **es cóncava hacia abajo en el intervalo** $(a;b)$.

f) Si $f(c)$ **es un** $mínimo\ Relativo$, **entonces** $f''(c) < 0$.

4) Ejercicios adicionales

1.- Graficar f si se conoce que:

Dom f: R -$\{2\}$**; f(-3)= 0; f(-1)= 3; f(3) = 3/2 ; y=-2 es asíntota horizontal izquierda;**

y = $\frac{x}{2} - 1$ **es asíntota oblicua derecha; x = 2 es asíntota vertical**

f '(x) < 0 en (-1 ; 0) y en (2 ; 3) **f '(x) > 0 en (- ∞ ; -1), en (0 ; 2) y en (3 ; ∞)**

f '(0) = f '(3) = 0 **no existe f '(-1)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

f ''(x) > 0 en (-∞ ; -3), en (-1 ; 2) y en (2 ; ∞) **f ''(x) < 0 en (- 3 ; -1)**

2.- Grafique cada una de las funcies siguientes, realizando el estudio completo.

a) $y = x^4 - x^2 - 1$

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

c) $y = \dfrac{9x}{x^2 + 3}$

d) $y = \dfrac{5x + 1}{2x + |x|}$