# ○ Trabajo Práctico Nº 11: *Diferencial. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Valores extremos.*

*Nuestras acciones hablan sobre nosotros tanto como nosotros sobre ellas.*
*George Eliot*

## 1) Cuestionario

**a) Defina diferencial de la variable independiente y diferencial de la variable dependiente**

**b) ¿Cómo puede interpretar geométricamente la diferencial de una función?**

**c) Podría a partir de la diferencial de una función obtener la derivada de la misma? y recíprocamente?**

**e) ¿Qué aplicaciones conoce de la diferencial de una función?**

## 2) Ejercicios Resueltos

**1.- Calcular aproximadamente log 11.**

**Solución**

**Vamos a realizar el cálculo utilizando la expresión $f(x_o + \Delta x) \cong f(x_o) + f'(x_o)\,dx$ (1)(esta expresión se obtiene de considerar que $\Delta y \cong dy$ )**

**Donde $f(x_o + \Delta x)$ es lo que deseamos calcular, en nuestro caso log 11.**

**Tenemos que $f(x) = \log x$, por lo tanto $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$**

**Evaluamos tanto la función como su derivada en $x_o = 10$ (10 es el valor de x más próximo a 11 donde conocemos cuánto vale la función)**

**$f(x_o) = f(10) = \log 10 = 1$ ; $f'(x_o) = f'(10) = \dfrac{1}{10 \ln 10}$ ; $\Delta x = 11 - 10 = 1 = dx$.**

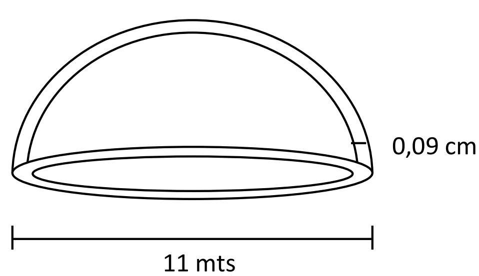
**Reemplazando en (1):**

$$\log 11 \cong \log 10 + \frac{1}{10 \ln 10} \cdot 1 \cong 1 + 0{,}0434294 \cong 1{,}0434294$$

**2.- Se desea pintar el interior de una cúpula semiesférica, de 11 mts de diámetro, dando tres manos de pintura que constituyen un total de 0,09 cm de espesor. Calcular aproximadamente y exactamente el volumen de pintura a utilizar.**

**Solución**

**Realizamos un esquema de la situación**



**Datos:**

**El espesor de la pintura representa el cambio en el radio, r, y vale $\Delta r = dr = -0{,}09$ ( el signo menos es porque el radio disminuye)**

**El volumen aproximado de la pintura a utilizar está dado por el cambio aproximado en el volumen, V, de la semiesfera : dV**

**El radio exterior de la cúpula es r = 5,5 m = 550 cm ( unificamos las unidades)**

**El volumen de una semiesfera es** $V(r) = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ **por lo tanto**

**dV = V' ( r ) dr**$\Rightarrow dV = \frac{2}{3}\pi\, 3 r^2\, dr = 2\pi r^2\, dr$

$dV\Big|_{\substack{r=550\\ dr=0{,}09}} = -2\pi(550)^2\ 0{,}09 = -54450\pi = -171059{,}72$ **(el signo negativo indica que el volumen de la semiesfera disminuye)**

**Entonces la cantidad aproximada de pintura necesaria para pintar la cúpula es de 171059,72 cm$^3$ o bien de 171,05972 litros.**

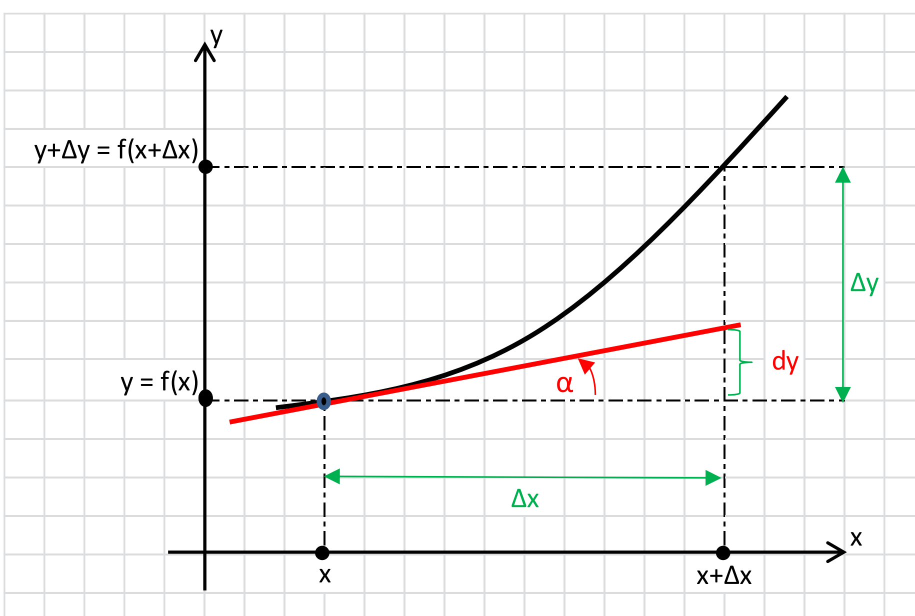
**La cantidad exacta de pintura está dada por la variación exacta en el volumen de la semiesfera, es decir V(r + Δr ) − V (r ) , donde r = 550 ; Δr = −0,09 y r + Δr = 550 + (− 0,09 ) = 549,91**

**ΔV = V ( 549,91 ) − V ( 550 ) =** $\frac{2}{3}\pi\,(549{,}91)^3 - \frac{2}{3}\pi\,(550)^3 = -171031{,}729$

**Entonces la cantidad exacta de pintura necesaria para pintar la cúpula es de 171031,729 cm$^3$ o bien de 171,031729 litros.**

## 3) Ejercicios para resolver en clases

**1.- De acuerdo con el siguiente gráfico, interpreta y explica el significado de:**



**a)** $\Delta x$ **b)** $x + \Delta x$ **c)** $\Delta y$ **d)** $y + \Delta y$

**e)** $m = \operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ **f)** $dy$ **g)** $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + f'(x).\Delta x$

**2.- Dada** $f$ **tal que** $f(x) = 4x^2 - 1$ **, encuentra** $\Delta x,\ \Delta y$ **y** $dy$ **para la variación dada de** $x$ **:**

**i)** $x$ **varía de 1 a 1,5** **ii )** $x$ **varia de 1 a 1,11** **iii)** $x$ **varia de 1 a 1,002**

**Compara los valores obtenidos. ¿Que observación puedes hacer sobre ellos?**

**3.- El área** $A$ **de un cuadrado varía cuando su lado** $l$ **se incrementa en** $\Delta l$**. Esquematiza en una figura la situación descripta y calcula** $\Delta A$ **y** $dA$ **si el lado es de** $12\ cm$ **y se incrementa en:**

**i) 1 cm** **ii) 0,1 cm.**

**Indica qué representan** $\Delta A$ **y** $dA$.

**4.- En cada caso calcular la diferencial solicitada:**

**a)** $dy$ **y** $d^2y$ **si** $y = 4x^3 - x.\operatorname{sen} x$ **b)** $d^2y$ **si** $y = 5^{2x} + \ln\left(\frac{3}{x^{3/4}}\right)$

**c)** $dP$ **si** $P = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos t}\right] - t^{2/3}$ **d)** $dV$ **si** $V^4 - t^4 = 1$

**5.- Utiliza diferenciales para calcular aproximadamente:**

**i)** $(3.03)^4$ **ii )** $\sqrt{38}$ **iii)** $\cos 138°$

**6.- Un domo es una cúpula o bóveda arquitectónica en forma de semi esfera. Utiliza diferenciales para estimar el volumen de pintura necesario para aplicar una mano de 0,04 cm de espesor, sabiendo que el diámetro es de 30 m.**

**7.- En la mayoría de las industrias, los tubos de Acero son de uso común para el transporte de fluídos (líquidos y gases). El peso específico del Acero es** $7850\ kg\ /\ m^3$**. Determinar cuál será el peso** $P$ **aproximado de un tubo de dicho material de** $8\ m$ **de largo,** $2''$ **de radio interior y** $2{,}54\ mm$ **de espesor.**

**8.- Utiliza diferenciales para deducir una fórmula aproximada del volumen** $V$ **de un cascarón cilíndrico delgado, de altura** $h$**, radio interior** $r$**, y espesor** $\Delta r$.

**9.- En un triángulo rectángulo se sabe que un cateto mide** $30\ cm$**, y se mide el ángulo opuesto a dicho cateto de 30° con un posible error de medición de** $\pm 1°$**. Estimar, utilizando diferenciales, el error máximo posible en el cálculo del área** $A$ **de la superficie del triángulo. Si el error relativo de una cantidad** $x$ **es** $\frac{\Delta x}{x}$ **¿cuál es el error relativo en el área?**

**10.- El radio** $R$ **de un sector circular mide** $120\ cm$**, y el ángulo central** $\hat{\theta} = 120°$**. Determinar cuál será la variación del área** $A$ **de este sector si:**

**a) el radio** $R$ **aumenta** $1\ cm$ **b) el ángulo** $\theta$ **disminuye** $1°$

**11.- El alcance $R$ de un proyectil con una velocidad inicial $Vo$ y un ángulo de elevación $\hat{\theta}$ está dado por $R = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta)$, en donde $g$ es la aceleración de la gravedad. Determina aproximadamente cuál es la variación en el alcance $R$ del proyectil si:**

**a) la velocidad inicial aumenta de $100\ pies/seg$ a $110 pies/seg$.**
**b) el ángulo de elevación aumenta en $1°$.**

Suponga $\hat{\theta}$ = 45° y $Vo$ = 100 pies/seg.

**12.- Obtiene los valores críticos de las funciones siguientes:**

**a)** $f(x) = 9x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ **b)** $g(x) = x^{2/3}.(x-2)^3$ **c)** $h(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

**13.- Determina los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados:**

**a)** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1$ **en** $[-3; 2]$ **b)** $f(x) = 2x.\sqrt{3-x}$ **en** $[-1; 4]$

**c)** $f(x) = -x - \frac{1}{x}$ **en** $[-2; 2]$

## Teorema de Rolle

**14.- Para las siguientes funciones *f* y *g*, muestra que tanto *f* como *g* no satisfacen la conclusión del Teorema de Rolle en el intervalo indicado en cada caso. ¿Cuáles son las hipótesis que no se cumplen?**

**a)** $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(2-x)^2}$ **en** $[-1; 5]$ **b)** $g(x) = 3x^4 + 2x^2$ **en** $[0; 2]$

**15.- Prueba que la función $f(x) = 2x^2 - x^4$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle, en el intervalo $[-2; 2]$, y encuentra todos los números "$c$" que satisfacen la misma.**

## Teorema del Valor Medio

**16.- Prueba que las funciones dadas verifican las hipótesis del Teorema del Valor Medio en los intervalos de referencia, y encuentra todos los números que satisfacen la mismas:**

**a)** $f(x) = x^3$, **en** $[-1; 1]$ **b)** $f(x) = 3x.(x-1) - 4x^2 + 3.(x+2) - 8$ , **en** $[-3; 1]$

**17.- En un control caminero, un policía decide levantar una infracción por exceso de velocidad a un camionero. El camionero afirma que en el tramo de 272 km que recorrió en $3\ horas$, su camión nunca superó la máxima permitida que es de $90\ km/h$. El policía le dice al camionero que es imposible recorrer esa distancia en dicho tiempo sin exceder la velocidad límite. ¿Quién tiene razón, el camionero o el policía? Utiliza dicho Teorema para aclarar la situación.**

**18.- Contesta por Verdadero o Falso y Justifica: si la función $f$ es derivable en $[-1; 2]$, con $f(-1) = -1$ y $f(2) = 5$, entonces existe un punto sobre la gráfica de $f$ en el que la recta tangente es *perpendicular* a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x$.**

## 4) Ejercicios adicionales

**1.- La derivada dy/dx de sen(x+y) + cos y = y es : ..................................................**

**2.- Hallar dy si:**

**a)** $y = x \ln x + \operatorname{tg} 2x$

**b)** $dy\ ,\ d^2y \ \wedge\ d^3y \ ,\ \text{si} \quad y = 4^x + \operatorname{sen} x^2$

**c)** $dx \ \wedge\ dy \ ,\ \text{si} \quad x^3 + 5y = e^x + \operatorname{ch} y$

**3.- Utilizar diferencial para calcular, en forma aproximada, la variación del área de un cuadrado, sabiendo que el lado crece de 7 cm a 7,03 cm.**