- **Trabajo Práctico Nº 10:** ***Derivada de funciones exponenciales. Derivadas de orden superior. Derivada del logaritmo y de las trigonométricas inversas. Derivación implícita. Derivada de ecuaciones paramétricas.***
-

El "etcétera" es el descanso de los sabios y la excusa de los ignorantes.
Jardiel Poncela

1) Cuestionario

a) ¿Qué entiende por derivadas sucesivas? ¿Cómo hace para calcular una derivada enésima?

b) ¿En qué consiste el método para derivar una función implícita?

c) ¿En qué consiste el método de derivación logarítmica?

d) ¿En qué tipo de funciones es *necesario* aplicar el método de derivación logarítmica? ¿cuándo es *conveniente* aplicar el método de derivación logarítmica? ¿En qué otros casos se puede aplicar el método de derivación logarítmica?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Dada la función f / $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, calcular $f^{(n)}(x)$ y $f^{(20)}(x)$

Solución

La notación $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ significa derivada enésima. Para calcularla debemos hallar las primeras derivadas, tantas como sean necesarias, hasta que nos demos cuenta el modelo que sigue, y así enunciar la fórmula que tendrá la derivada enésima

$y = (1-2x)^{-1}$

$y' = (-1).(1-2x)^{-2}(-2) = 1.2.\ (1-2x)^{-2}$

$y'' = 1.2.(-2).(1-2x)^{-3}(-2) = 2^2 .1.2.(1-2x)^{-3}$

$y''' = 2^2\ 1.2.(-3).(1-2x)^{-4}\ (-2) = 2^3 .1.2.3.(1-2x)^{-4}$

$y^{iv} = 2^3 .1.2.3.(-4).(1-2x)^{-5}\ (-2) = 2^4 .1.2.3.4.(1-2x)^{-5}$

$y^{v} = 2^4 .1.2.3.4.(-5).(1-2x)^{-6}\ (-2) = 2^5 .1.2.3.4.5.(1-2x)^{-6}$

Podemos ver la forma que van tomando las derivadas sucesivas , y teniendo en cuenta que**:**

1. 2.3.4.5 = 5! y en general 1. 2.3.4.5.6...n = n! , se tendrá

$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n} = 2^n .n!\ (1-2x)^{-(n+1)}$ que es la fórmula para la derivada enésima

Para el cálculo de $f^{(20)}(x)$ simplemente reemplazamos en la fórmula encontrada n por 20

$f^{(20)}(x) = 2^{20} . 20! \ (1-2x)^{-21}$

2.- Calcular y' mediante derivación implícita, siendo $\text{sen}(x + y) = y^2 \cos x$

Solución

Si queremos encontrar y' debemos considerar primero que

$\dfrac{dy}{dx} = (y)' = y'$ y que $\dfrac{dx}{dx} = (x)' = 1$

Luego derivamos ambos miembros de la ecuación respecto a x (aplicando las reglas de derivación vistas hasta ahora , es decir regla de la suma , regla del producto, regla de la cadena , etc.) y a continuación resolvemos la ecuación resultante para y', es decir

$$(\text{sen}(x + y))' = (y^2 \cos x)' \ \mathbf{(1)} \Rightarrow$$

$$\cos(x + y)(x + y)' = 2yy' \cos x + y^2(-\text{sen}\, x) \Rightarrow$$

$$\cos(x + y)(1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\text{sen}\, x) \Rightarrow$$

$$\cos(x + y) + y' . \cos(x + y) = 2yy' \cos x + y^2(-\text{sen}\, x)$$

Note que en el primer miembro de **(1)** aplicamos la regla de la cadena dos veces y en el segundo miembro, la regla de la cadena (recordar que y es función de x) y del producto

Agrupamos los términos que contienen y' **:**

$$y^2 \text{sen}\, x + \cos(x + y) = 2y \cos x \ y' - \cos(x + y)\, y'$$

Luego despejamos y'**:** $y' = \dfrac{y^2 \text{sen}\, x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$

3.- Aplicar derivación logarítmica para encontrar y', siendo:

a) $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$ b) $y = x^{\sqrt{x}}$

Solución

El método de derivación logarítmica consiste en aplicar logaritmo natural miembro a miembro, derivar en forma implícita y luego despejar y'.

Se debe tener en cuenta que los logaritmos tienen propiedades – solamente – si se aplican a productos, cocientes, potencias o raíces; como sigue:

$\ln(MN) = \ln M + \ln N$ // $\ln\left(\dfrac{M}{N}\right) = \ln M - \ln N$ / $\ln(M^n) = n \ln M$ // $\ln\left(\sqrt[n]{M}\right) = \dfrac{\ln M}{n}$

Al derivar con respecto a x: $\ln y = \ln F$ aparece en el primer miembro $\dfrac{1}{y} y' = (\ln F)'$, entonces el despeje de la derivada que se busca se obtiene pasando la fórmula de la función (y) al segundo miembro multiplicando.

En cuanto a las derivadas, se debe recordar algunas reglas:

i) Base constante y exponente variable – función exponencial $\rightarrow \left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln a . f'(x)$

ii) Base variable y exponente constante – función potencial $\rightarrow \left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n\left(f(x)\right)^{n-1} f'(x)$

iii) Base y exponente constantes – función constante $\rightarrow \left(a^n\right)' = 0$

iv) Base y exponente variables $\rightarrow \left(f(x)^{g(x)}\right)'$ Se deriva aplicando derivación logarítmica.

a) $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right) \Rightarrow \ln y = \dfrac{3}{4}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$

Al derivar implícitamente con respecto a x , resulta

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{4}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+1} - 5\,\frac{3}{3x+2}$$

Despejando y', se tiene $\quad y' = y\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{15}{3x+2}\right)$

Reemplazando y por $\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ queda: $\quad y' = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{15}{3x+2}\right)$

b) Procediendo como en el caso recién visto se tiene

$$y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \ln y = \sqrt{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\ln x + \sqrt{x}.\frac{1}{x}$$

Note que en el segundo miembro se aplica derivada de un producto

Despejando y', se tiene $y' = y\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad$ Reemplazando **y:** $y' = x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Calcula la derivada de las funciones dadas por las fórmulas:

a) $y = 7^{\sqrt{x}}$ $\qquad$ **b)** $g(x) = 4x\,.\,9^{-x^2}$ $\qquad$ **c)** $f(x) = 7^{\left(6x^2\ .\ \cos x\right)}$

2.- a) Sea la curva dada por $f(x) = 4x + e^{x-9}$**, encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto de abscisa** $x = 9$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la curva, dada por $y = \sqrt[3]{x+6}$ **, en el punto donde** $y = 0$.

3.- Calcula las derivadas que se indican para cada una de las funciones dadas por su fórmula:

a) f' , f'' **y** f''' **siendo** $f(x) = 6x^2 - x^9 + \frac{1}{x^3}$

b) $f^{(n)}(x)$ **y** $f^{(10)}(x)$ **si** $f(x) = e^{5x}$

c) $f^{(n)}(x)$, $f^{(15)}(x)$ **y** $f^{(20)}(x)$ **si** $f(x) = \operatorname{sen} x$

4.- Utiliza la regla de la derivada de función inversa y obtiene y' **si :**

a) $y = arc\ tg\ x$ **b)** $y = arc\ cos\ x$ **c)** $y = arc \sec\ (x)$

5.- Si g **es la función inversa de** f **tal que** $f(x) = 2 + \sqrt{\mathrm{x}}$ **, encuentra** $g'(4)$ **sin determinar** g.

6.- Supone que f **es derivable en** $\boldsymbol{R}$ **y que** α **es un número real,** $\boldsymbol{F(x) = f(x^{\alpha})}$ **y** $G(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f(x)}]^{\alpha}$. **Encuentra una expresión para** $\boldsymbol{F'(x)}$ **y para** $\boldsymbol{G'(x)}$ **.**

7.-Para cada una de las siguientes funciones definidas por su fórmula, halla la derivada

a) $f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}+4)^9 . \operatorname{sen}(3 + 7x - \mathrm{x}^9) - \operatorname{arc\,sen}(\mathrm{x}+8)$

b) $gx) = \ln(\operatorname{sen} 8x)$ **c)** $h(x) = cos^7(\ln 3x)$ **d)** $i(x) = \ln\left(x^7 + \sqrt{8 + x^6}\right)$

e) $j(x) = x^6 . \ln 9x$ **f)** $k(x) = 7^x . \log(8x)$ **g)** $l(x) = 7^{\ln 7x} + \frac{e^3}{\log(9x)}$

h) $m(x) = \ln(\ln 7x)$ **i)** $n(x) = \left(\log_5 5x\right)^5$ **j)** $p(x) = \log_9 \sqrt{x} + e^{7.cosx}$

8.- Escribe la expresión de cada función $y = f(x)$ **empleando las propiedades de la función logaritmo, de modo que la función se defina como el logaritmo de una única expresión, y luego calcula la derivada :**

a) $\mathrm{y} = \frac{1}{3}\ln(\mathrm{x}+2) + \frac{1}{3}\ln \mathrm{x}$ **b)** $y = \log_5 x - \log_5(\mathrm{x}+7) - \log_5(x-7)$

9.- Dada $\mathrm{y}= \frac{\sqrt{x}}{(x+9).\sqrt[3]{7x+8}}$ **, obtiene** $\frac{dy}{dx}$. **Para ello, aplica el logaritmo a la expresión dada (**$ln\ y$**) y luego deriva.**

10.- Obtiene la razón de cambio de $y = \ln \sqrt[5]{x}$ **en** $x = 32$.

11.- Calcula $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ **y** $\frac{dy}{dx}$ **en cada uno de los siguientes casos:**

a) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^5 - 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-6t} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 7 + 3t^4 \\ y = e^{4t} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = (a-1).\cos t \\ y = a.\operatorname{sen} t \end{cases}$ **siendo** $a = cte$.

12.- a) Encuentra el o los puntos donde la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 6t - 3 \\ y = e^{t-1} + 2 \end{cases}$$

sea paralela a la recta de ecuación: $6y - x - 12 = 0$

b) Encuentra el o los puntos donde la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 4\mathrm{t} + 8 \\ \mathrm{y} = \mathrm{t} + \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \end{cases}$$

sea paralela a la recta de ecuación $y - \frac{1}{4}x = 5$.

13.- Halla la derivada de:

a) $y = arc\operatorname{sen}(5x-1)^2$ **b)** $y = \sqrt[5]{arc\operatorname{sen} x^8}$ **c)** $y = x^{1/5}.\ arc\operatorname{cotg} x^4$

4) Ejercicios adicionales

1.- Hallar la derivada solicitada

a) $f''(x)$ y $f^{(5)}(x)$ si $f(x) = \operatorname{sen} 2x - x^9$

b) $f^{(3)}$ y $f^{(n)}$ si $f(x) = \ln(1+x)$

2.- La derivada: ***dy/dx*** de: **sen(x+y) + cos (y) = y** es : ....

La derivada de: $f(x) = e^x$

Si se quiere determinar la derivada de $f(x) = e^x$ resulta el siguiente límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x.1 = e^x$$

El $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 1$ según surge de la Tabla D1 de valores Δx próximos a cero para

$$f(\Delta x) = \frac{\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

La derivada de la exponencial la misma función : $f(x) = f\,'(x) = e^x$

$$\Delta x \to 0^-$$

Δx	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$
$f(\Delta x) = \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$	0,786938	0,951625	0,995016	0,999500	0,999950	0,999999

$$\Delta x \to 0^+$$

Δx	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$f(\Delta x) = \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$	1,297442	1,051709	1,005016	1,000500	1,000050	1,000000

Tablas TD1 : Valores próximos a cero por izquierda y por derecha para $f(\Delta x) = \frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$