○ Trabajo Práctico Nº 9: *Significado geométrico y físico de la derivada. Derivada de funciones trigonométricas. Regla de la cadena.*

El gran libro de la naturaleza siempre está abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en el... Pero no la podemos leer a menos que hayamos aprendido primero el lenguaje y los caracteres con los cuales está escrito. Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas.

Galileo Galilei

1) Cuestionario

a) Defina recta tangente a una curva en un punto. Indique su ecuación.

b) Defina recta normal a una curva en un punto. Indique su ecuación.

a) ¿Qué entiende por derivadas sucesivas? ¿Cómo hace para calcular una derivada enésima?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Determinar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = 2x^3 - 4x$ en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Solución

• Si f es derivable en $x = x_o$, la recta tangente al gráfico de f en el punto P (x_o , y_o) es la recta que pasa por P y tiene por pendiente el número $m = f'(x_o)$. Su ecuación será $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

• Si la derivada en x_o es infinita, entonces la recta tangente al gráfico de f en el punto P (x_o,y_o) es la recta vertical que pasa por P (x_o,y_o) y su ecuación será $x = x_o$

• Recta Normal al gráfico de f en el punto P (x_o,y_o) es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente al gráfico de f en el punto P y su ecuación es**:**

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o) \qquad \text{si } f'(x_o) \neq 0 \;;$$

$$x = x_o \qquad \text{si } f'(x_o) = 0$$

$$y = y_o \qquad \text{si la derivada en } x_o \text{ es infinita}$$

En nuestro caso nos dan como dato el punto $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ es decir que $x_o = -\frac{1}{2}$ e $y_o = -\frac{1}{4}$

Por lo tanto lo único que queda por calcular es la pendiente de la recta tangente, que la calculamos con la fórmula $m = f'(x_o)$, es decir

$$f'(x) = 6x^2 - 4 \quad \text{y} \quad f'(-\frac{1}{2}) = 6(-\frac{1}{2})^2 - 4 = -\frac{5}{2}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente es**:** $y + \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

y la ecuación de la recta normal es**:** $y + \frac{1}{4} = \frac{2}{5}(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{20}$

2.- El consumo de combustible (medido en litros por hora) de un automóvil que viaja a una velocidad v (en Km/h) es $C = f(v)$

a) ¿ Cuál es el significado de la derivada $f'(v)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Escribir una oración (en términos corrientes) para explicar el significado de la ecuación**:**

$$f'(20) = -0{,}05$$

Cómo encarar la resolución de problemas

No existen reglas firmes y rápidas que garanticen el éxito en la resolución de los problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales del proceso de solución y dar algunos principios que pueden resultar útiles. Estos pasos no son más que la aplicación del sentido común.

− El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo con claridad. Hágase las preguntas siguientes **:** *¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son las cantidades dadas?, ¿Cuáles son las condiciones dadas?.*

Para muchos problemas, resulta útil *dibujar un diagrama* e identificar las cantidades dadas y requeridas en el diagrama.

Por lo común, es necesario *introducir una notación apropiada.*

− Al elegir los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a , b, c, x , y , pero en algunos casos, ayuda usar iniciales como los símbolos sugeridos; por ejemplo, V para el volumen, t para el tiempo, etc.

− Encontrar una relación entre la información dada y lo que se desconoce de manera que permita calcular la incógnita. Con frecuencia ayuda preguntarse**:** ¿Cómo se puede relacionar lo dado con lo desconocido?.

− Si no ve una relación inmediata, intente reconocer algo familiar, relacionando la situación dada con sus conocimientos , Por ejemplo si en el esquema armado existe un triángulo rectángulo, piense en el Teorema de Pitágoras.

− Intente reconocer patrones, algunos problemas se resuelven al reconocer que se presenta algún tipo de patrón. Este puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si reconoce regularidad o repetición en un problema, quizás sea capaz de conjeturar cual es el patrón y probarlo.

− Intente pensar en un problema análogo, es decir, un problema semejante o relacionado, pero mas fácil que el original, entonces éste le podría dar los indicios que necesita para resolver el problema original. Por ejemplo, si en un problema intervienen números muy grandes, podría intentar primero un caso semejante con números mas pequeños

− Introduzca algo adicional, a veces puede ser necesario introducir algo nuevo, algo auxiliar, para ayudar a establecer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva recta trazada en el diagrama. En un problema algebraico lo auxiliar podría ser una nueva fórmula que relacione la incógnita original con una nueva

− En los problemas de razones de cambio y derivada es útil además**:**

- Expresar la información dada (el dato) y lo que queremos averiguar (la incógnita) en términos de derivada (razón de cambio)
- Escribir una ecuación que relacione las diversas cantidades del problema. Si es necesario, aplicar los aspectos geométricos de la situación para eliminar una de las variables por sustitución
- En el caso que sea necesario, usar la regla de la cadena para derivar los dos miembros de la ecuación respecto del tiempo t
- Sustituir la información dada en la ecuación resultante y resolver para la razón de cambio desconocida

Nota: La derivada de cualquier función (la función no siempre depende del tiempo), puede interpretarse como la razón de cambio puntual (instantánea) de la variable dependiente con respecto de la variable independiente.
Si y = f(x), entonces la "la razón de cambio promedio" de y (por un cambio unitario en x) es el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

La razón de cambio puntual (instantánea) de y con respecto a x es el límite cuando $\Delta x \to 0$, de la razón de cambio promedio. Así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

La derivada, como una razón de cambio, tiene aplicaciones en las distintas ciencias**:** Los físicos se interesan por ejemplo, en la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia). Los químicos, que estudian una reacción química, se interesan en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada velocidad de reacción). Un fabricante de acero se interesa en la razón de cambio del costo de producir x toneladas de acero por día con respecto a x (lo que se conoce como costo marginal). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de las razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales.

Solución

a) En nuestro caso la derivada $C'(v) = f'(v)$ es la razón de cambio instantánea del consumo de combustible con respecto a la velocidad del automóvil , es decir , indica la variación en el consumo de combustible por cada unidad de variación en la velocidad.

Debido a que $f'(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta v}$ las unidades de $f'(v)$ son las mismas que las del cociente incremental $\frac{\Delta C}{\Delta v}$. Puesto que ΔC se mide en litros por hora y Δv en Km./h se deduce que las unidades de $f'(v)$ son las de litros por hora y por Km. por hora

b) Cuando la velocidad del automóvil es de 20 Km./h el consumo de combustible esta decreciendo a razón de $0{,}05\ \dfrac{\frac{\text{litros}}{\text{h}}}{\frac{\text{Km}}{\text{h}}}$ (el signo negativo indica que decrece)

3.- Un móvil recorre en línea recta la distancia s (en metros) según la ley $s = t^2 - 6t + 4$. Determinar

a) La velocidad y aceleración a los 5 seg

b) La aceleración y la velocidad inicial

c) El momento en que le móvil está en reposo

Solución

a) La función velocidad es la derivada de la función posición **:** $s = s(t) = t^2 - 6t + 4$

Es decir $v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt} = 2t - 6$

Por lo tanto la velocidad después de 5 seg. significa la velocidad instantánea cuando t = 5 seg.

$\therefore\ v(5) = 2.5 - 6 = 4$ m/seg.

La aceleración es la derivada de la función velocidad**:** $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 2 \quad \therefore\ a(5) = 2$ m/seg^2

Esto significa que el móvil se esta moviendo con aceleración constante igual a 2 m/seg^2

b) Teniendo ya la fórmula de a (t) y de v (t) , la aceleración y la velocidad en el instante inicial se calcula para t = 0 , esto es **:**

$v(0) = 2.0 - 6 = -6$ m/seg ; $a(0) = 2$ m/seg^2

c) El móvil está en reposo cuando v (t) = 0 , esto es **:** $v(t) = 2t - 6 = 0 \quad \therefore\ t = 3$ seg.

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- La curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2+1}$ se llama " Bruja de Agnesi". Encuentra la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $P(-1; \frac{1}{2})$.

2.- Escribe las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la parábola de ecuación $y = x^2 + 5$, que pasan por el punto de coordenadas $P(3; 14)$.

3.- Imagina que un objeto se mueve siguiendo una trayectoria rectilínea, de modo que la distancia d expresada en metros, luego de transcurrido un tiempo t medido en segundos, es:

$d = \sqrt{t-1}$

a) Encuentra la función velocidad e indica las unidades correspondientes.
b) Calcula la velocidad del objeto cuando transcurrieron 1,5 $segundos$
c) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de 2 m/seg?

4.- Una región es azotada por el virus Ébola. Las Autoridades Sanitarias estiman que al transcurrir t días a partir del inicio de la epidemia, el número de personas que contrajeron el virus está dado por $P(t) = 50t^2 - t^3$ cuando $\mathbf{0 \leq t \leq 30.}$ ¿A qué tasa se expande la terrible enfermedad a los 10 días de iniciada la epidemia?, ¿y a los 20 días?, ¿y a los 30?

5.- Encuentra la derivada de las siguientes expresiones con funciones trigonométricas:

a) $f(t) = 3\sqrt{t}.\operatorname{sen} t$

b) $s(\alpha) = (5 - \operatorname{sen}\alpha).(3\alpha - \cos\alpha)$

c) $u(\beta) = \frac{8+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta+9\beta}$

d) $v(\gamma) = 2\operatorname{cotg}\gamma + 9\operatorname{cosec}\gamma$

e) $g(\emptyset) = 5x^4 - \frac{2-\sec\emptyset}{5-\operatorname{cosen}\emptyset}$

f) $h(x) = 3x^5.\operatorname{tg} x + 4\sec x$

6.- Sea $f(x) = x - \cos x$. Encuentra todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$ en los cuales la recta tangente sea horizontal. Encuentra todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$ en los que la recta tangente tenga pendiente $m = 2$.

7.- Calcula la derivada de las siguientes funciones empleando la Regla de la Cadena:

a) $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 9)^5$

b) $g(\mathrm{x}) = \frac{1}{(x^2+7\mathrm{x}-9)^3}$

c) $h(x) = \left(\frac{\mathrm{x}^4+3}{1+5\mathrm{x}}\right)^9$

d) $i(\mathrm{x}) = \sqrt[7]{\mathrm{x}^9 + 8}$

f) $j(\mathrm{x}) = \sqrt{\sqrt{x} + 4\mathrm{x}}$

g) $k(\mathrm{x}) = \cos(\operatorname{cotg}\mathrm{x})$

h) $l(\mathrm{x}) = \operatorname{sen}^3 8\mathrm{x}$

i) $\mathrm{m(x)} = \log(\frac{9}{x} + 9x^5)$

h)$n(x) = (3 + 2\mathrm{x})^5.\,cot\mathrm{g}^8(8\mathrm{x}^2)$

8.- Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. La longitud de cada lado aumenta a razón constante de $2\ \frac{cm}{h}$. ¿Cuál es la razón de cambio $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ que expresa el crecimiento del área del triángulo cuando un lado mide $8\ cm$?

9.- Halla la expresión que se solicita en cada caso. Supone que las funciones son derivables:

a) g'(x), si $g(x) = \mathbf{f\{f[f(x)]\}}$

b) h'(x), si $h(x) = \mathbf{f[f^8(x)] + \frac{f(x)}{7-x^2}}$

c) m'(x), si $m(x) = \sqrt[3]{\mathbf{\frac{x+9}{x+f(x)} + f(x)}}$

10.- Si f es tal que $f(x) = e^x.\ g(x)$, con $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, obtiene: $f'(0)$

4) Ejercicios adicionales

1.- La ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2\text{-}4\ x^2$ que es paralela la la recta y+4x= 2 es:

A) $y = \frac{x}{4} + \frac{7}{8}$ B) $y = 4x - 1$ C) $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{8}$ D) $y = -4x + 3$

2.- Debido a un derrame el radio de una mancha circular de aceite está creciendo a una velocidad constante de 2 km por día. ¿ A que velocidad está creciendo el área del derrame 3 días después del que comenzó ?

3.- Sea $f(x) = x^3 - 1$; encuentre el punto en la función y la ecuación de la recta tangente donde sea paralela a la recta $y = 3x$. ¿ La solución es única?

Derivada de la composición de funciones (Regla de la Cadena)

Si f y g son funciones diferenciables y $h/h(x) = (f \circ g)_{(x)} = f(g(x))$ entonces h' resulta

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \quad \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$si \quad g(x+\Delta x) \neq g(x) \; cuando \;\; \Delta x \neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$si \quad g(x) = u \quad y \;\; g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

$$= f'(u).g'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) \qquad\qquad si \quad g(x+\Delta x) \neq g(x) \; cuando \;\; \Delta x \neq 0$$

Si f y g son funciones diferenciables y $\mathbf{h/h(x) = (f \circ g)_{(x)} = f(g(x))}$ es la función compuesta, entonces h es diferenciable y su derivada h´ es el siguiente producto

$$\mathbf{h'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = f'\big(g(x)\big).g'(x)}$$

Al aplicar la Regla de la Cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: la función interior g y la función exterior f y decir que

La derivada de la composición de dos funciones es la derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interior (Figura FD1)

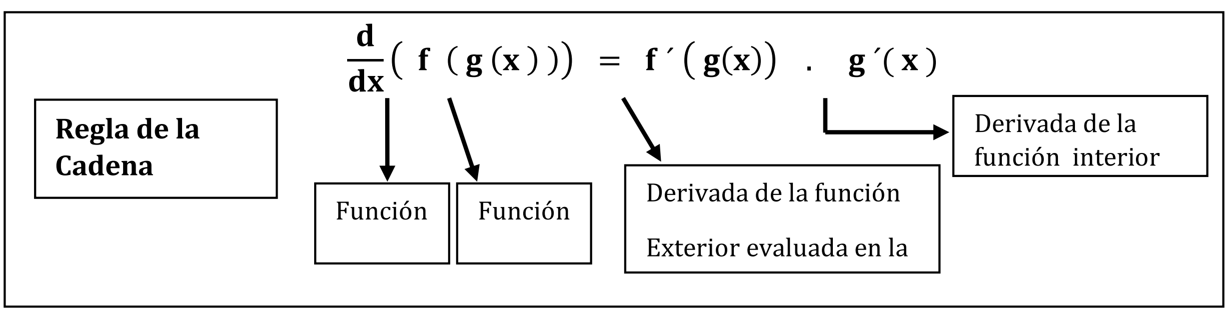

Figura FD1 : Regla de la Cadena

Ejemplos

- Para $G(x) = sen(x^2+3)$, resultan $\begin{cases} f(x) = sen\,x & \text{la Función exterior} \\ g(x) = \; x^2+3 & \text{la Función interior} \end{cases}$, de modo que

  $f'(x) = \cos x$ es la derivada de la función exterior

  $f'(x^2+3) = \cos\;(x^2+3)$ es la derivada de la función exterior evaluada en la función interior

  $g'(x) = 2x$ es la derivada de la función interior

Entonces $\quad G'(x) = 2x \ \cos \ (x^2+3)$

- Para $H(x) = (x^5-3x)^3$, resultan $\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{la Función exterior} \\ g(x) = x^5 - 3\,x & \text{la Función interior} \end{cases}$, entonces

$f'(x) = 3x^2$ es la derivada de la función exterior

$f'(x^5-3x) = 3\,(x^5-3x)^2$ es la derivada de la func. exterior evaluada en la función interior

$g'(x) = 5x - 3$ es la derivada de la función interior

Se obtiene $\quad H'(x) = 3\,(x^5-3x)^2 \ \ (5x-3)$

Si $\ u(x) = a^x = e^{\ln a\, x}$, resultan $\begin{cases} f(x) = e^x & \text{la Función exterior} \\ g(x) = \ln a \ \ x & \text{la Función interior} \end{cases}$, entonces

$f'(x) = e^x$ es la derivada de la función exterior

$f'(\ln a \ \ x) = e^{\ln a \ x} = a^x$ es la derivada de la función exterior evaluada en la func. interior

$g'(x) = \ln a$ es la derivada de la función interior

Se obtiene $\quad u'(x) = a^x \ln a$

- Para $k(x) = tg^3(x^2+1)$ resultan $\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{la Función exterior} \\ t(x) = tg(x^2+1) & \text{la Función interior} \end{cases}$, entonces

$f'(x) = 3x^2$ es la derivada de la función exterior

$f'\big(tg(x^2+1)\big) = 3\,tg^2\,(x^2+1)$ es la derivada de la func. exterior evaluada en la func. interior

La función interior $\ t\ $ es una función compuesta donde $\begin{cases} g(x) = tg\ x & \text{la Función exterior} \\ h(x) = x^2+1 & \text{la Función interior} \end{cases}$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \,.\cos x - (-senx)senx}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

es la derivada de la función interior

$$g'(x^2+1) = sec^2(x^2+1)$$

es la derivada de la función exterior de t evaluada en la función interior de t

$h'(x) = 2x$ es la derivada de la función interior de *t.*

Se obtiene $\quad t'(x) = sec^2(x^2+1) \ \ 2x$ que es la derivada de la función interior de k

Entonces $k'(x) = 3\,tg^2\,(x^2+1) \ \ sec^2(x^2+1) \ \ 2x = 6\,x \ \ tg^2\,(x^2+1) \ \ sec^2(x^2+1)$

A partir de este ejemplo, podemos enunciar la regla de la cadena para la composición de tres funciones

$$\boxed{\text{Si } \ k(x) = (f\circ g\circ h)_{(x)} = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) \ \Rightarrow \ k'(x) = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big)\ .\ g'\big(h(x)\big)\,.\,h'(x)}$$