Trabajo Práctico N° 8: La derivada. Definición. Reglas de derivación para la suma algebraica, el producto y el cociente de funciones.

La constancia obtiene las cosas más difíciles.
Benjamín Flanklin

1) Cuestionario

a) Exprese con sus propias palabras el significado geométrico de la derivada
b) Defina derivada de una función en un punto
c) Defina función derivada
d) ¿Qué relación existe entre Derivabilidad y Continuidad?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Calcular la derivada de la función f, aplicando la definición**:** $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Solución

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ \textbf{(1)}$$

Para aplicar la definición de derivada en este ejemplo determinamos primero

$f(x+h) = \dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}}$ luego reemplazando en **(1)** $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+h}}}{h}$ Como este límite es indeterminado de la forma 0 / 0, para calcularlo debemos aplicar los métodos vistos en los trabajos prácticos anteriores, en este caso primero vamos a efectuar la resta en el numerador y luego a multiplicar numerador y denominador, por el conjugado del numerador

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+h+1}}{h.\sqrt{x+h+1}.\sqrt{x+1}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+h+1}}{h.\sqrt{x+h+1}.\sqrt{x+1}} . \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+1-x-h-1}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+h+1}\right)} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \left(2\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-1}{2(x+1)^{3/2}}$$

2.- Calcular la derivada de las siguientes funciones aplicando reglas de derivación.

a) $f(t) = \sqrt{t} - e^t + t^{(\cos \pi)}$

b) $y = 4x^3 + \dfrac{\operatorname{sen}x}{x} + 5^x$

c) $f(x) = (x^{-5} + 4x)\cos x$

Solución

Recordemos las principales reglas de derivación

Sean f y g funciones derivables en x

i) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

ii) $[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\,.g'(x)$

iii) $[f(x) \,/\, g(x)]' = \dfrac{f(x)'\,.\,g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$; con $g(x) \neq 0$

iv) $[c \,.\, f(x)]' = c\,.f'(x)$ con $c \in R$

a) Para saber qué regla de derivación debemos usar primero es necesario determinar qué tipo de operación tiene la función a derivar es decir, operación de suma o resta, producto o cociente. En este caso tenemos una suma por lo tanto

$$f'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' - \left(e^t\right)' + \left(t^{(\cos \pi)}\right)'$$

$(\sqrt{t})' = (t^{1/2})' = \dfrac{1}{2}t^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$; $(e^t)' = e^t$; $(t^{(\cos \pi)})' = (t^{-1})' = -t^{-2}$ Es decir

Que $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - e^t - t^{-2}$

b) En este caso también se presenta una suma, pero uno de los sumandos es un cociente por lo tanto debemos aplicar la regla de la suma y luego en el segundo sumando la regla del cociente.

$$\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen}x)'.x - \operatorname{sen}x.(x)'}{(x)^2} = \frac{\cos x\,.\,x - \operatorname{sen}x\,.1}{x^2}$$ Entonces**:**

$$f'(x) = 12x^2 + \frac{\cos x\,.\,x - \operatorname{sen}x}{x^2} + 5^x \ln 5$$

c) En este ejemplo la función está formada por un producto de funciones por lo tanto**:**

$f'(x) = (x^{-5} + 4x)' \cos x + (x^{-5} + 4x)(\cos x)'$

$f'(x) = (-5x^{-6} + 4)\cos x + (x^{-5} + 4x)(-\operatorname{sen}x) = (-5x^{-6} + 4)\cos x - (x^{-5} + 4x)\operatorname{sen}x$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Encuentra la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8$ en el punto de coordenadas $(3;1)$ empleando límite. Obtiene la ecuación de la recta tangente y grafica la parábola y la recta obtenidas.

2.- Se registraron las temperaturas T en grados Celsius, cada hora a partir de la media noche, en un día de abril, en cierta ciudad. Para el tiempo t en horas, se miden las temperaturas obteniéndose los datos que se dan en la siguiente tabla:

t (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
T(°C)	6,5	6,1	5,6	4,9	4,2	4,0	4,0	4,8	6,1	8,3	10,0	12,1	14,3	16,0	17,3	18,2	18,8	17,6	16,0	14,1	11,5	10,2	9,0	7,9	7,0

a) ¿Qué unidades tiene $\frac{\Delta T}{\Delta t}$? ¿Cómo se llama este cociente y qué representa para las variables de este problema?

b) Encontrar la tasa promedio de la temperatura con respecto al tiempo

i) desde el mediodía hasta las 3 P.M.

ii) desde el mediodía hasta las 2 P.M.

iii) desde el mediodía hasta la 1 P.M.

3.- En una empresa, el costo (en pesos) de producir x unidades de cierto artículo es:

$$C(x) = 6500 + 8x + 0{,}04x^2$$

a) Encuentra el valor de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$, cuando se cambia el nivel de producción

i) De $x = 50$ a $x = 60$

ii) De $x = 50$ a $x = 55$

iii) De $x = 50$ a $x = 51$

b) Halla $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$ cuando $x = 50$

c) ¿Qué representan los valores de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ y el valor de $C'(50)$? ¿Qué observas si comparas estos valores?

4.- Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 40 km. La carrera empieza a mediodía. A las 12.30 pm un corredor cruza la marca de 15 km y a las 13.10 pm el corredor pasa por la marca de 30 km, Cual es la velocidad media del corredor hasta el momento que cruza la primer marca y luego entre la primer y segunda marca?

5.- Calcula lo solicitado, utilizando la definición de derivada:

a) $f'(x)$ si $f(x) = 3x - 8$ b) $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x+4}$

c) $f'(x)$ si $f(x) = \frac{5}{x-9}$ d) $f'(x)$ y $f'(2)$ si $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$

6.- Sabiendo que: $f(4) = -8$, $f'(4) = 1$, $g(4) = -8$ y $g'(4) = 2$, obtiene :

a) $f'(4).g'(4)$ b) $(f.g)'(4)$ c) $(\frac{f}{g})'(4)$ d) $(\frac{g}{f})'(4)$

7.- Sabiendo que: $f(2) = 1$, $f'(2) = -2$, $g(2) = -3$ y $g'(2) = -8$, obtiene :

a) $(f-g)'(2)$ b) $(f.g)'(2)$ c) $(\frac{f}{g})'(2)$ d) $(\frac{g}{f-g})'(2)$

8.- Demuestra que la función $f(x) = |x+4|$, aunque es continua en $x = -4$, no es derivable en dicho punto.

9.- Si los resultados de los siguientes límites corresponden a la derivada de una función f en algún número a, indica en cada caso la fórmula de la función f y el número a:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2(-2+h)^4 - 2(-2)^4}{h} = f'(a)$ $\Longrightarrow$ $f(x) =$ ………… y $a =$ …

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} = f'(a)$ $\Longrightarrow$ $f(x) =$ ………… y $a =$ …

c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = f'(a)$ $\Longrightarrow$ $f(x) =$ ………… y $a =$ …

d) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} = f'(a)$ $\Longrightarrow$ $f(x) =$ ………… y $a =$ …

10.- Calcula la derivada de las funciones dadas por las siguientes fórmulas

a) $f(x) = 4x^5 + 2x^7 - 5 + 7\sqrt[9]{x^4}$

b) $g(x) = (6x^3 - 1).(3x^6 + 9)$

c) $g(x) = \frac{9}{\sqrt[5]{x}} - \frac{5m}{x^3} + \frac{2}{5t^2}$

d) $r(x) = \frac{4-x^{3/4}}{x} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

e) $f(t) = \frac{2t}{5t^3-7t^2+9t-2}$

f) $g(z) = \frac{3z^2-9}{9x-2z}$

g) $h(z) = \frac{3z^9}{7z+\frac{5}{3z^3}}$

h) $r(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{8+cos^4x}$

4) Ejercicios adicionales

1.- Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una **N**

Si f(x) = $\sqrt[3]{7x-3} + \log_9 \frac{x^2+1}{\text{ch}x} + \frac{1}{10}$, entonces f ' (x) es: $\boxed{}$

A) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{\ln 9}\frac{\text{ch}x}{x^2+1}$

B) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{\ln 9}\frac{1}{\frac{x^2+1}{\text{ch}\,x}}\frac{2x\,\text{ch}\,x-\left(x^2+1\right)\text{sh}\,x}{\text{ch}^2x} - \frac{1}{10^2}$

C) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{\ln 9}\frac{1}{\frac{x^2+1}{\text{ch}\,x}}\frac{2x}{\text{sh}\,x}$

D) $\frac{7}{3}(7x-3)^{-2/3} + \frac{1}{\ln 9}\frac{\text{ch}x}{x^2+1}\frac{2x\,\text{ch}\,x-\left(x^2+1\right)\text{sh}\,x}{\text{ch}^2x}$

2.- Encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = \left(1-3x^5\right)\left(\lg_5(x+2)\right)$

b) $f(t) = 4^{2x-x^3} - \frac{\cos x}{\text{tg}^4x}$

La Derivada

El mismo concepto aplicado a muchos problemas

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f\,'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\,'(x_0)$$

Ritmo de cambio

Razón de Cambio

de una variable (variable dependiente) respecto de la otra (variable independiente) en x_0

Algunos Ejemplos

Función (variable dependiente)	Variable independiente	Interpretación de la derivada de la función
Distancia recorrida por un móvil en movimiento rectilíneo	Tiempo	Tasa de cambio de la distancia recorrida en t_0 Velocidad en t_0
Masa de un alambre o cable	Distancia al extremo inicial del cable	Tasa de cambio de la masa del alambre o cable en la distancia x_0 del extremo inicial Densidad de un alambre o cable en x_0
Ingreso	Cantidad de artículos	Tasa de cambio del ingreso para la cantidad x_0 de artículos producidos Ingreso marginal para x_0 artículos
Carga eléctrica	Tiempo	Tasa de cambio de la carga eléctrica en el tiempo t_0 Corriente en t_0
Velocidad	Tiempo	Tasa de cambio de la velocidad en el tiempo t_0 Aceleración en t_0
Fuerza que produce un desplazamiento rectilíneo	Longitud del desplazamiento	Tasa de cambio de la fuerza que se desplaza a la posición x_0 Trabajo para el desplazamiento x_0
Cantidad de microorganismos presentes	Tiempo	Tasa de cambio del tamaño de la población en t_0 Tasa de crecimiento en t_0
Volumen de líquido en un recipiente	Tiempo	Tasa de cambio del volumen en el tiempo t_0 Ritmo de llenado o de desagote

El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ permite obtener . . .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

***Ritmo de cambio* Promedio**

***Razón de Cambio* Promedio**

de una variable (variable dependiente) respecto de la otra (variable independiente) en un intervalo $[x_0, x_0+\Delta x]$

Cálculos de la derivada empleando la definición

Ejemplo 1:

Dado el límite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

el resultado, para todo x para el que exista, corresponde a la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ con Dominio $=[0,+\infty)$. Si se calcula, se obtiene

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x}\,\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\,\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f'(x)$$

Para el cálculo del límite se ha salvado la indeterminación multiplicando numerador y denominador por

$$\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right).$$

La función derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ es $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. El dominio de f' es $(0+\infty)$ (no incluye al cero)

Ejemplo 2:

Para obtener la derivada de $f(x)=sen\,x$ calculamos el límite correspondiente a la definición de función derivada y si se reemplaza empleando la identidad trigonométrica

$$sen(x+\Delta x)=senx\;cos\Delta x+sen\Delta x\;\;cos\;x$$

resulta:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x+\Delta x)-senx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx\;cos\Delta x+sen\Delta x\cos x-senx}{\Delta x}=$$

Si se reagrupa y se calculan los límites, se obtiene:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\;senx\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\cos x=senx.0+1.\cos x\;=cosx$$

Donde se tiene en cuenta que:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x}=1\;\;y\;\;\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}=0$$

El primer resultado corresponde al límite trigonométrico básico y el otro cálculo se desarrolla a continuación

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}\frac{(\cos\Delta x+1)}{(\cos\Delta x+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cos^2\Delta x-1}{\Delta x\,(\cos\Delta x+1)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-sen^2\Delta x}{\Delta x\,(\cos\Delta x+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\frac{sen\Delta x}{(\cos\Delta x+1)}=\;-1.\frac{0}{2}\;=\;-1.0=0$$

Trabajando en forma similar se obtiene que si $f(x)=\cos x\;\Rightarrow\;f\,'(x)=-sen\;x$

Ejemplo 3:

Para obtener la derivada de $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$, se plantea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \begin{cases} si \;\; x > 0 \overset{x+\Delta x>0}{\Longrightarrow} \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\ si \;\; x < 0 \overset{x+\Delta x<0}{\Longrightarrow} \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \end{cases}$$

Así , se ha obtenido

$$f\,'(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x > 0 \\ -1 & si \; x < 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ se obtiene que no existe $f\,'(0)$ pues no existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \qquad\qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

La función $f(x) = |x|$ es diferenciable (o derivable) en $\mathrm{R} - \{0\}$

La no existencia de $f\,'(0)$ para $f(x) = |x|$ se observa en la gráfica de f como un punto anguloso o un punto en que la curva no tiene una única tangente. En la Figura D1 se observan la función valor absoluto y su derivada.

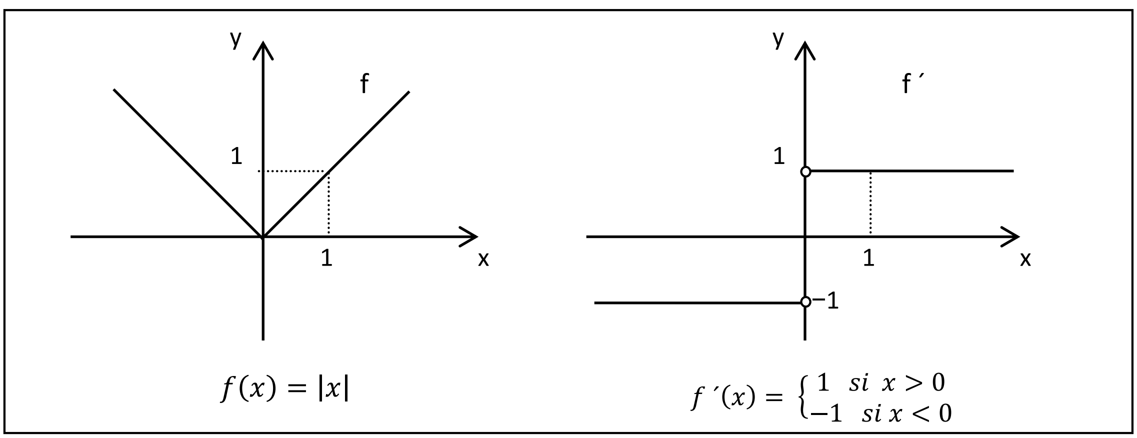

Figura D1 : Las gráficas de valor absoluto y su función derivada

Reglas de derivación

Las siguientes reglas de derivación nos permitirán derivar sin necesidad de calcular límites

1.- Derivada de la función constante

Si $f(x) = K$, K es una constante real, la gráfica de esta función es una recta horizontal, o una recta de pendiente cero; de modo que se obtiene que $f\,'(x) = 0$. Resulta:

$$\boxed{\mathbf{\frac{d}{dx}(K) = 0 \;,\;\; K \text{ es Real}}}$$

2.- Derivada de la potencia

Sea $f(x) = x^n$, n es natural; entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Para poder calcular este límite, obtengamos las expresiones que se resultan cuando se eleva a potencias naturales un binomio.

$$(x + \Delta x)^1 = x + \Delta x$$
$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3\,x^2\,\Delta x + 3\,x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$(x + \Delta x)^4 = x^4 + 4\,x^3 \Delta x + 6\,x^2\,(\Delta x)^2 + 4\,x\,(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$$
$$\vdots$$
$$(x + \Delta x)^n = x^n + n\,x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

Reemplazando, se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left(n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,\Delta x + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x} = n\,x^{n-1}$$

Resulta:

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x^n}) = \mathbf{n\,x^{n-1}} \quad , \qquad \textbf{n es Natural}}$$

Por ejemplo:

$$Si \;\; f(x) = x \;\; \Rightarrow f'(x) = 1.x^0 = 1.1 = 1$$

$$Si \quad f(x) = x^5 \;\; \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

Regla de la Potencia (versión general):

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x^n}) = \mathbf{n\,x^{n-1}}, \textbf{si n es Real}}$$

Esta versión general de la regla de la potencia la demostraremos más adelante. Si la empleamos resulta:

$$Si \quad f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$$

$$Si \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{2/5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-3/5} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

$$Si \quad f(x) = \frac{1}{x^{\pi}} = x^{-\pi} \Rightarrow f'(x) = -\pi x^{-\pi-1} = -\frac{\pi}{x^{\pi+1}}$$

3.- Derivada del producto de una constante por una función

Sea $g(x) = K\, f(x)$, K *es una constante real* y f es una función diferenciable (existe f'). Entonces

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K\, f(x+\Delta x) - Kf(x)}{\Delta x} = K \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = K\, f'(x)$$

Si K es una constante y f es una función diferenciable, entonces

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(K\, f(x)) = K\, f'(x)}$$

Cuando se forman nuevas funciones a partir de la suma, diferencia, el producto o el cociente de funciones elementales, las derivadas se pueden calcular en término de las derivadas de las funciones elementales como se muestra a continuación.

4.- Derivada de la Suma y Diferencia de funciones

Sean f y g funciones diferenciables (existen f' y g') y sean las funciones $(f \pm g)_{(x)}$, entonces $\frac{d}{dx}(f \pm g)_{(x)}$ resulta:

$$\frac{d}{dx}(f \pm g)_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x) \pm g(x)\big)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x)$$

Sean f y g funciones diferenciables, entonces

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(f \pm g)_{(x)} = f'(x) \pm g'(x)}$$

La derivada de una suma (o diferencia) de funciones es la suma (o diferencia) de las derivadas.

Ejemplo: Si $h(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$, se obtiene $h'(x) = 3.5x^4 + \frac{1}{2}x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5.- Derivada del producto de funciones

Sean f y g funciones diferenciables (existen f' y g') y sea las función $(f.g)_{(x)}$, entonces $\frac{d}{dx}(f.g)_{(x)}$ resulta:

$$\frac{d}{dx}(f.g)_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x).g(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x).g(x)\big) \pm \big(\boldsymbol{f(x).g(x+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) + g(x+\Delta x)\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= f(x).g'(x) + g(x)f'(x)$$

Sean f y g funciones diferenciables, entonces:

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(f.g)_{(x)} = f(x).g'(x) + g(x)f'(x)}$$

6.- Derivada del cociente de funciones

Sean f y g funciones diferenciables (existen f' y g') y sea las función $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, de modo que $f(x) = h(x).g(x)$.

Podemos obtener f' empleando la regla de derivación para el producto de funciones. Se obtiene:

$$f'(x) = h(x).g'(x) + g(x)\ .h'(x) \ \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) - h(x)g'(x)}{g(x)} \xRightarrow{reemplazando\ h}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'_{(x)} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

Sean f y g funciones diferenciables y $\mathbf{g(x) \neq 0}$, entonces

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)'_{(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}}$$

La derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo: Si $k(x) = \frac{x^5}{(1+\sqrt{x})}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^5) = 5\,x^4 \quad \boldsymbol{y} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow \ k'(x) = \frac{5\,x^4(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$