Trabajo Práctico N° 7: *Continuidad.*

El requisito del éxito es la prontitud en las acciones.
Francis Bacon.

1) Cuestionario

a) ¿Cuándo una función es Contínua en un intervalo [a ; b]?
b) ¿Cuándo una función es Contínua en un punto?
c) ¿Cómo reconoce que una curva corresponde a una función contínua?
d) ¿Cómo se clasifican las discontinuidades? ¿En que se basa esa clasificación?

2) Ejercicios Resueltos

2.-Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas por sus fórmulas

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{-6}{x+5} & \text{si } x \le -3 \\ 2x+3 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 5x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución

Recordar la definición de función continua en un punto**:** la función ***f*** es continua en **x = a** si y solo si**:**

I) $\exists\, f(a)$; es decir f está definida en a

II) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (el límite para $\mathbf{x \to a}$ existe y es finito)

III) $f(a) = L$

También recordar que las operaciones de suma, diferencia, producto y composición de funciones contínuas da como resultado otra función contínua, y el cociente de funciones contínuas, también es contínua, salvo en los puntos que anulan el denominador.

a) Las expresiones que figuran en el numerador y denominador corresponden a una función contínua $\forall\, \mathbf{x}$ (¿porqué?). Por lo que los posibles puntos de discontinuidad se analizan en los valores de **x** para los cuales se anula el denominador, en este ejemplo es $\mathbf{x = -1}$

Como se ve $f(-1)$ no existe, por lo tanto es discontinua en ese punto, para saber que tipo de discontinuidad se presenta debemos determinar si existe o no el límite para $\mathbf{x \to -1}$.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$ presenta una indeterminación del tipo $\mathbf{\frac{0}{0}}$. Para eliminar la indeterminación, se multiplica y divide por el conjugado del binomio que contiene la raíz y luego se factorea.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+8-9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} =$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x^2+8}+3} = -\frac{1}{3}$$

Como para $\mathbf{x \to -1}$ el límite existe y es finito, entonces presenta una **Discontinuidad Evitable** (DE).

b) En una función definida sectorialmente como es h, los puntos donde cambia la fórmula de la función son posibles puntos de discontinuidad. Para poder determinar si lo son o no, es necesario analizar si se cumplen los condiciones de continuidad. En este caso los posibles puntos de discontinuidad son en $x = -3$ y en $x = 1$. Luego hay que determinar si cada una de las expresiones en las que se divide la fórmula, corresponde o no a una función continua en su dominio de definición.

$\frac{1}{x+5}$ no es continua $\forall\ x \in (-\infty, -3)$, pues en $x = -5 \in (-\infty, -3)$, la expresión no está definida

$2x + 3$ es continua $\forall\ x \in (-3, 1)$ y $5x^2$ es continua $\forall\ x \in (1, \infty)$; en ambos casos por ser expresiones polinomiales.

Clasificación de las discontinuidades

I) En $x = -3$

- $\exists\ f(-3) = -3 \quad \therefore$
- Cálculo de $\lim_{x\to -3} f(x)$. Como en $x = -3$ se produce un cambio de fórmula es necesario calcular los límites laterales

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (2x + 3) = -3$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{-6}{x+5} = -3$$

Como los limites laterales son iguales $\exists \lim_{x\to -3} f(x) = -3$

- $f(-3) = \lim_{x\to -3} f(x)$, por lo tanto en **$\mathbf{x = -3}$ la función es contínua.**

II) En $x = 1$

- $\nexists\ f(1) \therefore$ la función en $x = 1$ es discontínua.
- Para saber el tipo de discontinuidad se calcula $\lim_{x\to 1} f(x)$. Pero como en $x = 1$ se produce un cambio de fórmula es necesario calcular los limites laterales **:**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 5x^2 = 5 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x+3) = 5$$

Como los límites laterales son iguales $\exists \lim_{x \to 1} f(x) = 5$. Luego en **x = 1** la función presenta una **Discontinuidad Evitable.**

III) En $x = -5$

- $\nexists f(-5) \therefore$ la función en $x = -5$ es discontinua.
- Para saber el tipo de discontinuidad se calcula $\lim_{x \to -5} \frac{1}{x+5}$;

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{1}{x+5} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -5^+} \frac{1}{x+5} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -5} \frac{1}{x+5}$$

Entonces la función es **Discontinua No Evitable (DNE)** en **x = − 5** y **la discontinuidad es de tipo infinita**, pues los límites laterales son infinitos.

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- a) Demuestra que la función f tal que f (x) = x +5 es continua en x = 2.

b) Demuestra que la función f tal que $f(x) = \frac{2x^2+4}{x+2}$ es continua en $R - \{-2\}$.

2.- Demuestra que la función f tal que $f(x) = \frac{2x^2-18}{x-3}$ no es continua en $x = 3$, pero que el $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe.

3.- Propone el gráfico de una función continua en su dominio que cumpla todas las condiciones siguientes:

$$Dom\, f = R - \{-2;\ 2\},\ f(-3) = 3 \quad f(0) = 0, \quad f(3) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

4.- Propone el gráfico de una función que cumpla con las condiciones siguientes:

a) $f(1) = 0$, decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2,\ 1)$, creciente en $(1, \infty)$, y

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

b) $Dom(f) = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, $f(0) = -2$, f es par ;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$$

c) $Dom(f) = \boldsymbol{R} - \{5\}$, $f(-3) = \frac{9}{2}$, $f(0) = -2$, $f\,(3) = 2$, discontinua no evitable en $x = 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{f(x)} = 5, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)} = +\infty, \quad \lim_{x\to0^-} \mathrm{f(x)} = 1, \quad \lim_{x\to0^+} \mathrm{f(x)} = -2, \quad \lim_{x\to5} \mathrm{f(x)} = -\infty$$

5.- Traza la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas, y determina y clasifica los puntos de discontinuidad:

$$Dom(f) = R - \{0\}, \quad f(-6) = 0, \quad f(-3) = -6, \quad f(6) = 3, \quad f(3) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = -3, \quad \lim_{x\to3^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 6$$

6.- Encuentra el conjunto donde son continuas las siguientes funciones, y clasifica las discontinuidades encontradas:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ b) $\{f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ \ x \neq 0 \\ 2 & si\ \ x = 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & si\ \ x < 0 \\ 1\ \ si & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} & si\ \ x > 1 \end{cases}$ d)$f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

7.- Obtiene los valores de los números A y B para que f sea continua ∀ x ∈ R

a) $f(x) = \begin{cases} 4x - 7 & \text{si} & x \neq 3 \\ A & \text{si} & x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 6A & \text{si} & x < -3 \\ 3Ax - 7B & \text{si} & -3 \leq x \leq 1 \\ x - 12B & \text{si} & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -3\,\mathrm{sen}\,x & \text{si} & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\,\mathrm{sen}\,x + B & \text{si} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

8.- En un lago que fue sometido a un proceso de contaminación, el nivel de oxígeno disuelto en el agua (en %), inicialmente disminuye por un proceso de oxidación y luego se recupera por un proceso de natural de auto depuración. Ésta situación se modela mediante la función f tal que:

$$(t)= \frac{t^2-t+1}{t^2-1}\ .100$$

donde t se mide en semanas, y $f(t)$ es el porcentaje de oxígeno en el agua.

En base a esta situación**:**

a) Investiga el porcentaje de oxigeno que hay en el lago después de una semana, dos semanas, dos meses de contaminación

b) Grafica esta situación, e indica el tiempo en que la recuperación del oxígeno alcanza el 95%

c) ¿Cuál es la situación del oxígeno cuando $t \to \infty$?

9.- Si $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$, demuestra que existe un número c tal que $f(c) = 10$.

10.- Aplica el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada, en el intervalo $(1; 2)$. Calcula aproximadamente esta raíz:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

11.- Comprueba que las siguientes ecuaciones tienen una raíz real y localiza el intervalo en que se encuentra la misma. Estima la raíz correspondiente a cada caso:

a) $x^5 - 2x^4 = 2 - 3x$ b) $2x^3 + x = 1$ c) $e^x = 2 - x$ d) $e^{-x} = \ln x$ e) $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}$

4) Ejercicios adicionales

1.- Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

Dada f / $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & si \quad x<1 \\ 6c-5 & si \quad 1 \geq x \end{cases}$ **,** el valor de **c** para que f sea continua es : $\square$

A) 2 **B)** – 2 **C)** 0 **D) – 1**

2.- Determinar y clasificar, en cada caso, los puntos de discontinuidad de la función f. Indicar el o los intervalos donde la función es contínua:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{x^6 - 1}}$