Trabajo Práctico Nº 5: *El límite de una función*

El mejor modo de resolver una dificultad es no tratar de soslayarla
Noel Clarasó

1) Cuestionario

a) Describa con sus palabras el concepto de límite finito.
b) Defina límite finito.
c) Interprete gráficamente la definición de límite.
d) ¿Cuáles son los límites notables?
e) Indique cuales son las formas indeterminadas de un límite

2) Ejercicios Resueltos

1.- Dada la función f / f (x) = 3x - 8

Calcular **:** $\lim\limits_{x \to -9} f(x)$

Solución

Se reemplaza directamente **x** por **− 9**, porque la función dada por **f (x) = 3 x − 8** es un polinomio:

$$\lim_{x \to -9} f(x) = \lim_{x \to -9} (3x - 8) = 3 \cdot (-9) - 8 = -35$$

2.- Dada la función f / f (x) = $x^2 + 1$

Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Solución

Se reemplaza directamente **x** por **0**, porque la función dada por **f (x) = x^2 + 1** es polinómica:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = (0)^2 + 1 = 1$$

3) Ejercicios para resolver en clases

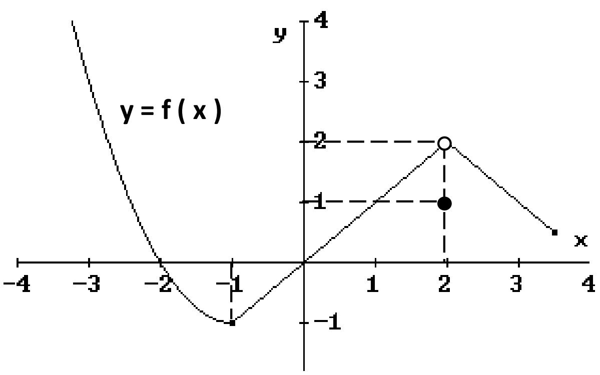
1.- Dada la función f / y = f (x) = $\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

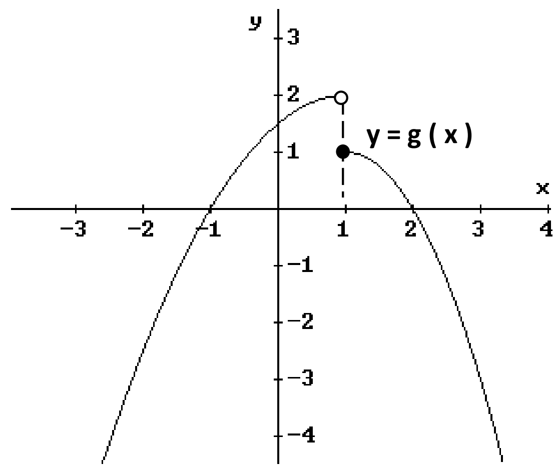
a) Completar la siguiente tabla para valores de x próximos a 2. Trabajar los resultados con cuatro cifras decimales

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f (x)								

b) ¿A qué valor se aproxima f (x), si x se acerca (tiende) a 2?
c) Usar notación de límite para describir esta situación.
d) Indicar el dominio de la función f. Explicar porque es posible que
   exista el limite de f(x) cuando x tiende a 2 y no exista f(2)

2.- Usar las gráficas de las funciones **f** y **g** para calcular cada límite, si es que existe. Si el límite no existe, explicar porqué





a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2} g(x) =$ c) $\lim_{x\to 1^+} g(x) =$

d) $\lim_{x\to 1^-} g(x) =$ e) $\lim_{x\to 1} g(x) =$ f) $\lim_{x\to 2} \left(f(x) - g(x)\right) =$

g) $\lim_{x\to 1} \left(f(x) + g(x)\right) =$ h) $\lim_{x\to 0} \left(f(x) . g(x)\right) =$ j) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) =$

k) $\lim_{x\to 2} \left(x^3 . f(x)\right) =$ l) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)} =$

3.- Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar

a) Si existe f(a), entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)$

b) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces existe f(a)

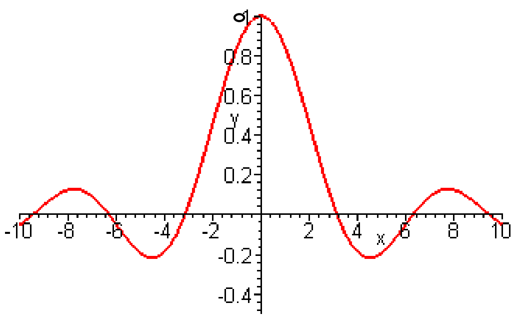
4.- Trazar la gráfica de una función f, que satisfaga las siguientes condiciones**:**

f(a) = 2 ; f(3) = – 3 ; f(–3) = 3 ; $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$; $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$; $-3 < a < 3$

5.- Dadas las siguientes funciones f propone el valor del límite, si existiera.

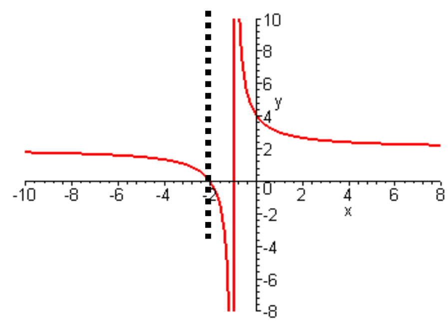
Puedes construir una tabla adecuada, emplear la gráfica, etc., para mostrar que el límite es el número propuesto o que no existe, según corresponda.

a) $f(x) = \frac{\mathbf{sen\,x}}{\mathbf{x}}$, obtiene: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



b) $\mathbf{f(x) = \frac{2}{x+1} + 2}$, obtiene: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$

lim

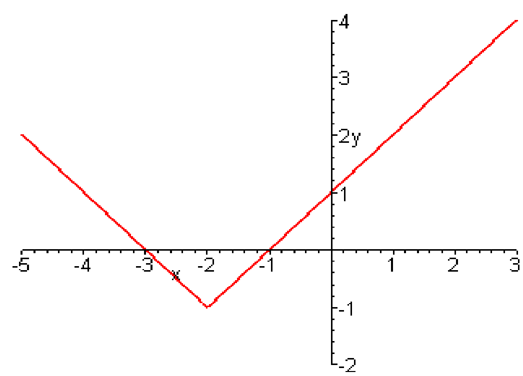


c) Obtiene $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ si:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si\ \ x < -1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{si}\ \ \mathbf{-1} < x < 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{si\ \ x} > 1 \end{cases}$$

d) Si $f(x) = |x + 2| - 1$, obtiene:

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



6.- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, completa con la respuesta correcta:

a) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) - [g(x) - L]\} =$………………

b) $\lim\limits_{x \to a} \{\frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{f(x)+g(x)}\} =$…………….............

c) $\lim\limits_{x \to a} \{\frac{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}{f(x)-g(x)}\} =$ …………………..

d) $\lim\limits_{x \to a} \{\frac{[f(x)]^2 + [g(x)]^2 - 2.f(x).g(x)}{f(x)+g(x)}\} =$…………

7.- Calcular los siguientes límites**:**

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x}{3x^3 - 16}$

b) $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^2 + 7y + 10}{y + 2}$

c) $\lim\limits_{y \to 3} \dfrac{\sqrt{y + 13} - 2\sqrt{y + 1}}{y^2 - 9}$

d) $\lim\limits_{z \to 1} \left(\dfrac{1}{z - 1} - \dfrac{2}{z^2 - 1} \right)$

e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

f) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

g) $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^4 - y^2 + 14y + 16}{y^3 - 2y^2 - 15y - 14}$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2\sqrt[4]{3x - 14} - 2}{1 - \sqrt[3]{3x - 14}}$

i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ si I) $f(x) = x^2 - 3$

II) si $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

III) $f(x) = 5x + 9$

IV) $f(x) = \dfrac{1}{x - 7}$

8.- Evalúa los siguientes límites trigonométricos:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen 5x}{3x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \tan 4x}{5x}$

c) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1}{2\theta . \sec\theta . \operatorname{cosc}\theta}$

d) $\lim\limits_{t \to 0} (2t . \operatorname{cotg} t)$

e) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t^3}{sen^2 3t}$

f) $\lim\limits_{\beta \to 2\pi} \dfrac{\beta - 2\pi}{\operatorname{sen}\beta}$

4) Ejercicios adicionales

1.- $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2 - 25}{|x - 5|} =$

2.- $\lim\limits_{x \to 9} \left(\dfrac{x^2 - 81}{3 - \sqrt{x}} \right)^{1/3} =$

PROPIEDADES del límite de una función

1	Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = L$, L es único	**Unicidad**
2	$Si\ \ f(x) = k\ ,\quad k\ es\ un\ número\ real\ \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} k = k\quad para\ todo\ real\quad a$	**Límite de la función constante**
3	Si $f(x) = x \ \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} x = a\quad para\ todo\ número\ real\quad a$	**Límite de la función identidad**
4	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = L_1\ ,\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L_2\ ,\quad k\ \ es\ un\ número\ real \xRightarrow{4,5,6,7}$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} k\, f(x) = k \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = k\, L_1$	**Límite del producto de una constante por una función**
5	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f \pm g)_{(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) \pm \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L_1 \pm L_2$	**Límite de la suma y diferencia de funciones**
6	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f.g)_{(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x)\,.\,\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L_1.\ L_2$	**Límite del producto de funciones**
7	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}\quad si\quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L_2 \neq 0$	**Límite del cociente de funciones**
8	Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+}} f(x) = L_1 \neq 0\ \ y\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+}} g(x) = 0\ \Rightarrow\ \nexists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+}} \frac{f(x)}{g(x)}$	**No existencia del límite de un cociente de funciones**
9	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L\quad y\ \ f\ \ es\ continua\ en\ \ L\ \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f\ o\ g)_{(x)} = f\,(\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x)) = f(L)$	**Límite de una función compuesta**
10	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0^+\\ x\to 0^-}} \dfrac{senx}{x} = 1$	**Limite Trigonométrico Básico**

Ing. Tito Ramón Villagra (Prof. Adj.) - Ing. José Luis Fernández (JTP)

11	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$
12	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = L \quad y \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \begin{cases} L > 0 & \begin{cases} g(x) \to 0 \text{ tomando valores positivos} & +\infty \\ g(x) \to 0 \text{ tomando valores negativos} & -\infty \end{cases} \\ L < 0 & \begin{cases} g(x) \to 0 \text{ tomando valores positivos} & -\infty \\ g(x) \to 0 \text{ tomando valores negativos} & +\infty \end{cases} \end{cases}$
13	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad y \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L \;\; (L \neq 0) \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f.g)_{(x)} = \begin{cases} L > 0 & \substack{+\infty\\ -\infty} \\ L < 0 & \substack{-\infty\\ +\infty} \end{cases}$
14	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad y \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = L \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f+g)_{(x)} = \substack{+\infty\\ -\infty}$
15	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = L \quad y \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = 0$
16	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad y \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f.g)_{(x)} = \substack{+\infty\\ -\infty} \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f.g)_{(x)} = \substack{-\infty\\ +\infty} \end{cases}$
17	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} f(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad y \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} g(x) = \substack{+\infty\\ -\infty} \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to a^-\\ x\to a^+\\ x\to\pm\infty}} (f+g)_{(x)} = \substack{+\infty\\ -\infty}$
18	$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \pm\infty$ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$

Algunas Formas indeterminadas

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0\,.\,\infty \quad ; \quad \infty - \infty$$