Trabajo Práctico Nº 4: Funciones trigonométricas. Ecuaciones Paramétricas.

No se debe juzgar a un hombre por sus cualidades,
sino por el uso que hace de ellas.
Rochefoulcauld.

1) Cuestionario

a) ¿Cuántos Sistemas de Medición de ángulos conoce? Debe nombrarlos.
b) ¿Cuál es la **unidad** de cada uno de los Sistemas de Medición de ángulos?
c) Defina cada una de las funciones trigonométricas.
d) Defina cada una de las funciones trigonométricas **inversas**.
e) Defina Ecuación Paramétrica.
f) Indique dominio e imagen de una Ecuación Paramétrica.
g) ¿Una Ecuación Paramétrica es **siempre** una función?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Dado un ángulo $\beta = 30^{\circ}$ en el Sistema Sexagesimal, expresarlo en el Sistema Circular o Radial.

Solución

Tenemos que recordar la equivalencia entre ambos Sistemas, el Circular y el Sexagesimal:

180° equivalen a π Radianes, o bien π Radianes equivalen a 180°

Podemos entonces calcular lo solicitado ya sea por Regla de Tres Simple, o mejor aún, utilizando lo que se conoce como "factor de conversión" entre ambos Sistemas::

$$\beta = 30^{\circ} \cdot \frac{\pi \, Radianes}{180^{\circ}}$$

Simplificando las unidades, en este caso los grados ($\circ$), y simplificando también el 30 del numerador con el 180 del denominador, llegamos a que:

$$\beta = \frac{\pi}{6} \, Radianes$$

De este modo, podemos afirmar que:

$$\boxed{30^{\circ} \text{ equivalen a } \frac{\pi}{6} \, Radianes}$$

2.- Indicar el Dominio y escribir la ecuación paramétrica de la siguiente curva:

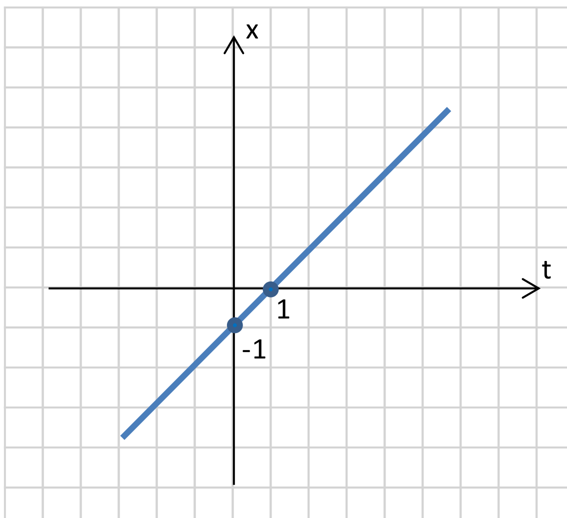
$$\begin{cases} x = t - 1 & (A) \\ y = t^2 & (B) \end{cases}$$

Solución

Si recordamos lo visto en la clase de Teoría, el Dominio de la ecuación paramétrica está dado por:

$$D_f = \text{Img. } x(t)$$

Aplicando el concepto en la expresión (A) : $x = t - 1$ (y ayudándonos con una representación gráfica) vemos que la expresión corresponde a una función lineal (una recta), donde la variable independiente es "t", y la variable dependiente es "x":



De modo que el Dominio será entonces el conjunto de los números Reales:

$$D_f = \boldsymbol{R}$$

Para encontrar ahora la expresión de la ecuación paramétrica $y = f(x)$ despejamos primero " t " de la expresión (A):

$$x = t - 1$$

$$x + 1 = t$$

de modo que: $t = x + 1$ (C)

Reemplazando " t " de la expresión (C) en (B) :

$$y = t^2$$

obtenemos finalmente la expresión de la ecuación paramétrica:

$$\boxed{y = (x + 1)^2}$$

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Completa la siguiente tabla:

En radianes	*En grados sexagesimales*	*En grados, minutos y segundos*
	192,27º	
2 π / 5		
		8º 56´ 45´´
	34,51º	
		201º 15´23´´
9 π / 7		
	256,76º	

2.- Emplea las gráficas de las funciones trigonométricas que están al final del Trabajo Práctico para indicar, en cada caso, el dominio e imagen, la simetría, el período y las intersecciones con el eje de abscisas:

Función	*Dominio*	*Imagen*	*Paridad*	*Periodo*	*Intersección con el eje x*
sen x					
cos x					
tg x					
cotgx					
sec x					
cosec x					

3.- Traza las gráficas de las funciones siguientes y determina en cada caso dominio, imagen y período.

a) $f(x) = -sen\ x$ b) $g(x) = -3.\mathrm{sen}(2x)$

c) $h(x) = 1 + \mathrm{sen}\, x$ d) $p(x) = \pi + \cos x$

4.- Completa la siguiente tabla, definiendo dominio e imagen de las funciones trígonométricas inversas:

f (x)	**f^{-1} (x)**	**Dominio f^{-1} (x)**	**Imagen f^{-1} (x)**
sen x	arcsen x		
cos x	arccos x		
tg x	arctg x		
cotg x	arccotg x		
sec x	arcsec x		
cosec x	arccosec x		

5.- Determina si la función dada es uno a uno (en su dominio y sobre su imagen). Si no es así, determina dominio e imagen de modo que la función propuesta sea uno a uno y encuentre la función inversa y su dominio e imagen:

a) $\mathrm{f(x)} = -\cos\left(\mathrm{x} + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\mathrm{g(x)} = \mathrm{sen}(\mathrm{x} - \pi)$

6.- La profundidad del agua d a la entrada de un puerto pequeño en el instante t es modelada por una función de la forma $d(t) = D + A\ sen\ B\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, 2π / B, B > 0 es el periodo de mareas, D es la profundidad media. Suponga que el periodo de mareas es 12 horas, la profundidad media en la marea alta es 18 pies y que la profundidad media en la marea baja es 6 pies. Dibuje dos ciclos de la grafica de d.

7.- Suponga que $T(t) = 50 + 10\ sen\frac{\pi}{12}(t - 8)$, $0 \leq t \leq 24$; es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante un cierto dia de la semana.

a) Cual es la temperatura a las 8 a.m.?

b) A qué hora(s) se cumple T(t) = 60 ?

c) Trace la gráfica de T.

d) Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas en que ocurren.

8.- Para las ecuaciones paramétricas dadas, completa las siguientes tablas:

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$

t	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
x									
y									

b) $\begin{cases} x = 2 + \operatorname{sen} t \\ y = -3 \operatorname{sen} t \end{cases}$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x									
y									

9.- Analizar e indicar el dominio y representar gráficamente las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son:

a) $\begin{cases} x = \frac{2}{t} \\ y = -\frac{t}{4} \end{cases}$ Si $t \in \mathbf{R} - \{ 0 \}$

b) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 - t \end{cases}$ I) $t \in \mathbf{R}$ II) Si $t \in (-\infty , 1]$

c) $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ $-\pi / 2 < t < \pi / 2$

d) $\begin{cases} x = \ln(t-1) \\ y = t + 2 \end{cases}$

10.- Escribir las ecuaciones paramétricas de la siguiente curva**:**
La parábola de ecuación $y = x^2 + 1$, considerando el parámetro igual a la pendiente de la recta tangente en cada punto, sabiendo que la pendiente es m = 2x.

11.- Encontrar las ecuaciones paramétricas que determinan el movimiento de una partícula que comienza en el punto de coordenadas $(-a; 0)$ y recorre una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

12.- Encuentre la ecuación cartesiana correspondiente a las siguientes ecuaciones paramétricas. Determine además el Dominio e Imagen, e indique las ecuaciones que definen una función.

a) $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 2 + 2\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 4e^{2t} \end{cases}$

13.- Encuentre las diferencias entre las curvas de las ecuaciones paramétricas.

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\cos t + 1 \end{cases}$ c)) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = 1 + 2\, e^{-t} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = e^{t} \\ y = 1 + 2\, e^{t} \end{cases}$

14.- Las ecuaciones paramétricas de la siguiente lista modelan el movimiento de una partícula que comienza en (a ; 0) y recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, con $a > 0$. Debes seleccionar de la columna de la derecha la manera correspondiente en que la partícula recorre la circunferencia

a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = -a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad -2\pi \le t \le 0$

i) Una vez en el sentido de las agujas del reloj

c) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 4\pi$

d) $\begin{cases} x = a\cos 2t \\ y = -a \operatorname{sen} 2t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

ii) Una vez en sentido contrario a las agujas del reloj

e) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad -4\pi \le t \le 0$

f) $\begin{cases} x = a\cos 2\pi t \\ y = a \operatorname{sen} 2\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

iii) Dos veces en el sentido de las agujas del reloj

g) $\begin{cases} x = a\cos 2\pi t \\ y = a \operatorname{sen} 2\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$

h) $\begin{cases} x = a\cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ y = a \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

iv) Dos veces en sentido contrario a las agujas del reloj

15.- La trayectoria de un proyectil que es lanzado con una velocidad inicial v_0 y con un ángulo de elevación θ, puede expresarse mediante las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)t \\ y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Donde el parámetro t representa el tiempo transcurrido desde el momento del disparo, g es la aceleración de la gravedad $(g = 9.8\frac{m}{s^2})$, x e y son las coordenadas del centro del proyectil (el origen de coordenadas se considera ubicado en el extremo del arma).
Si se dispara un proyectil con un ángulo de inclinación $\theta = 45^0$ y con una velocidad inicial $v_0 = 30\frac{m}{s}$, suponiendo que no hay resistencia del aire, calcular:

a) Las coordenadas del centro del proyectil en los instantes $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$
b) ¿En qué tiempo chocará el proyectil contra el suelo?
c) ¿A qué distancia del lugar del disparo (alcance) chocará contra el piso?
d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?
e) ¿En qué instante el centro del proyectil estará ubicado en el punto $P(106\,;94)$?
f) Si se duplica la velocidad inicial v_0, que ocurre con la altura máxima y con el alcance?

4) Ejercicios adicionales

1.- Traza las gráficas de las funciones siguientes y determina en cada caso dominio, imagen y período.

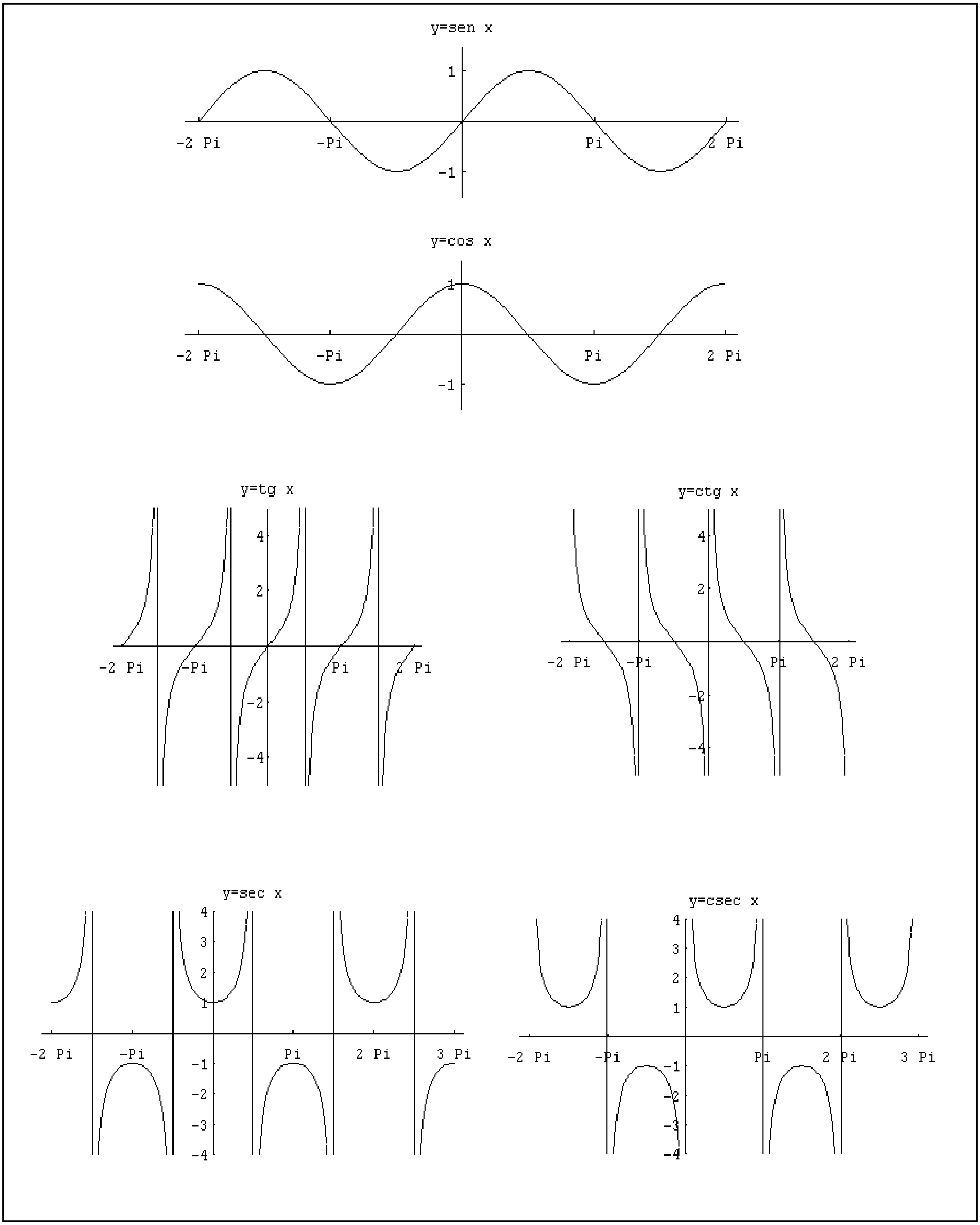
a) $q(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $r(x) = 1 - \sec x$

2.- Las curvas cuyas ecuaciones paramétricas quedan definidas por:

$$\begin{cases} x = a.\operatorname{sen}(n.t) \\ y = b.\cos(t) \end{cases}$$

donde $a, b \in R^+ \wedge n \in N$, reciben el nombre de "*figuras de LISSAJOUS*". Grafica la curva que se obtiene cuando $a = 1$, $b = 3$ y $n = 2$, e indica Dominio e Imagen. Sobre el gráfico, llama A al punto de la curva correspondiente a $t = 0$, y B al punto correspondiente a $t = \pi$.

Funciones Trigonométricas



Algunas Equivalencias entre Grados Sexagecimales y Radianes

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	270º	360º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Seno y Coseno para algunos ángulos

t (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1