Trabajo Práctico Nº 3: Funciones elementales y trascendentes. Gráficos trasladados.

Dejamos de temer aquello que se ha aprendido a entender.
Marie Curie

1) Cuestionario

a) Si conoce el gráfico de una función dada por $y = f(x)$, ¿Qué transformaciones podría hacerle a dicho gráfico y cómo quedaría modificada la fórmula en cada caso?
b) ¿Cuáles son las funciones elementales? Indicar la fórmula y asociarle el gráfico correspondiente
c) Indicar dominio e imagen de las funciones logaritmo y exponencial.
d) ¿Qué relación existe entre las funciones logaritmo y exponencial?
e) ¿Cuál es el gráfico de las funciones logaritmo y exponencial?

2) Ejercicios Resueltos

1.– Representar gráficamente, indicar dominio e imagen

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} - 5$

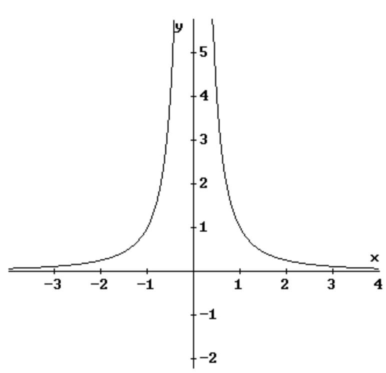
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$

Solución

Para representar gráficamente este tipo de funciones vamos a seguir los siguientes pasos:

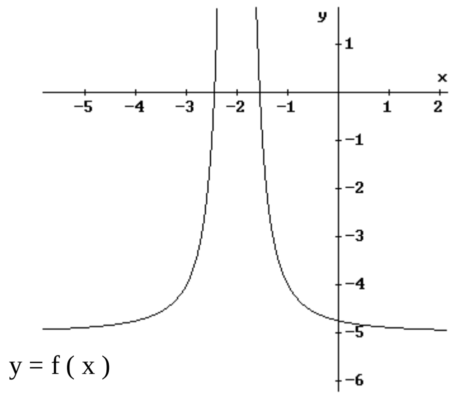
Paso 1**:** Identificar cual es la función elemental involucrada
Paso 2 **:** Usar los conceptos de traslación, reflexión, estiramiento y/o compresión
Paso 3 **:** Realizar una tabla con pocos valores

a) La función elemental asociada es $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ cuyo gráfico es el que se indica:

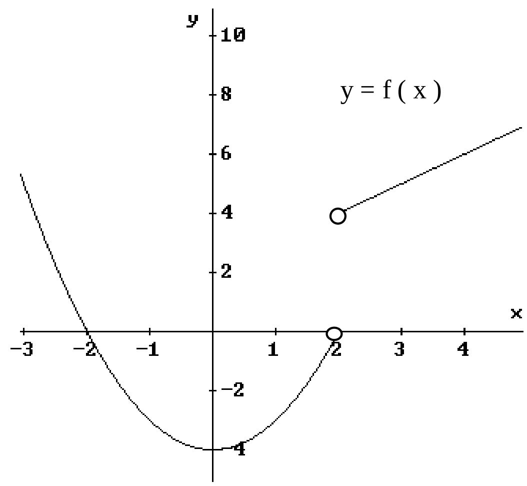


Al gráfico de esta función elemental se le deben realizar los siguientes desplazamientos**:** desplazamiento horizontal de 2 unidades hacia la izquierda y desplazamiento vertical de 5 unidades hacia abajo
Construyendo una tabla con pocos valores:

x	f(x)
– 1	– 4
– 3	– 4
0	–4.75
–4	–4.75



b) En este caso la función está definida sectorialmente, por lo tanto el gráfico que corresponde es la parábola de ecuación $x^2 - 4$ para valores de $x < 2$ y la recta de ecuación $x + 2$ para valores $x > 2$. Es decir:

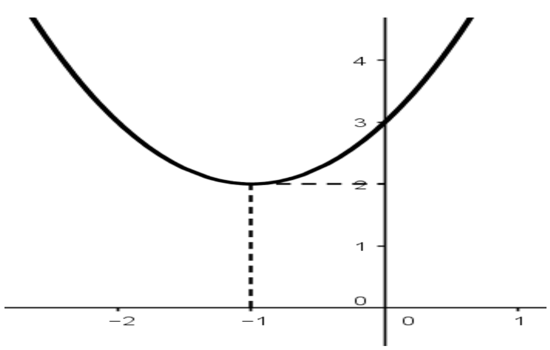


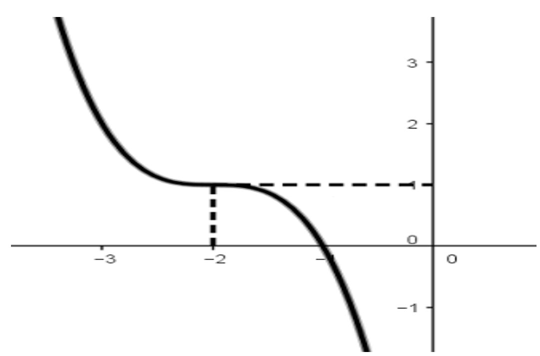
3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Dadas las funciones g(x) siguientes, escribe la ecuación correspondiente a cada gráfica, teniendo en cuenta que cada una de ellas se obtiene desplazando la gráfica de la función f(x) que se indica:

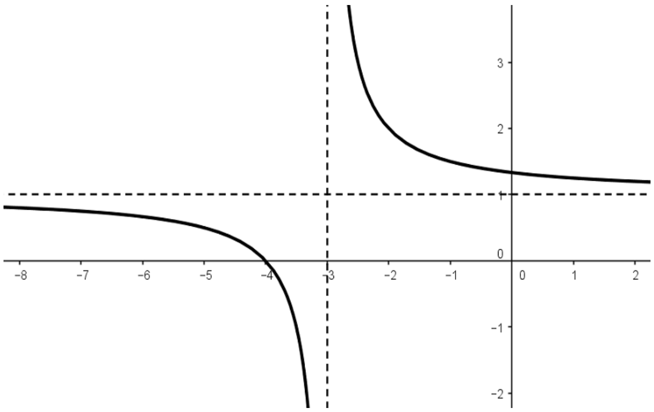
a) $f(x) = x^2$

b)$f(x) = x^3$

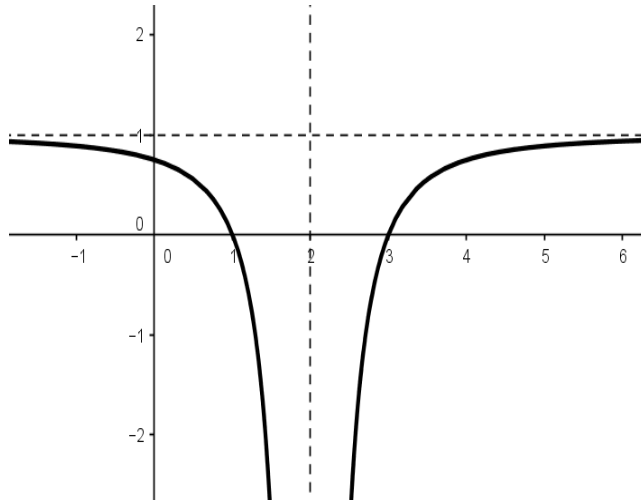




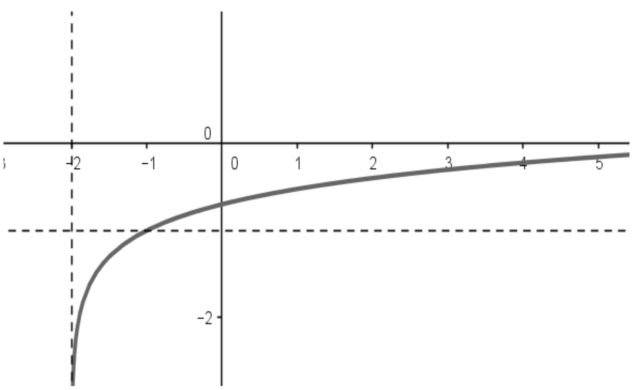
c) $f(x) = \frac{1}{x}$



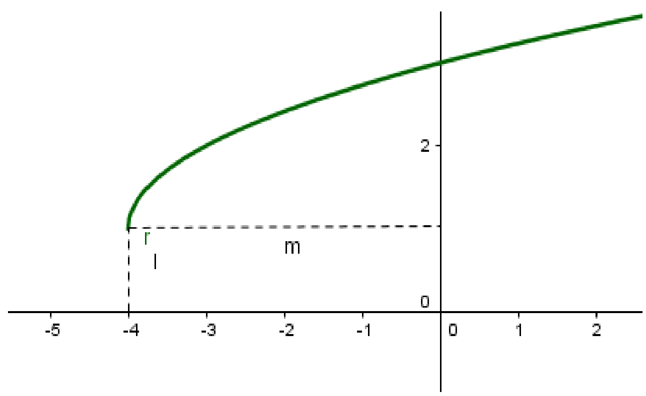
d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



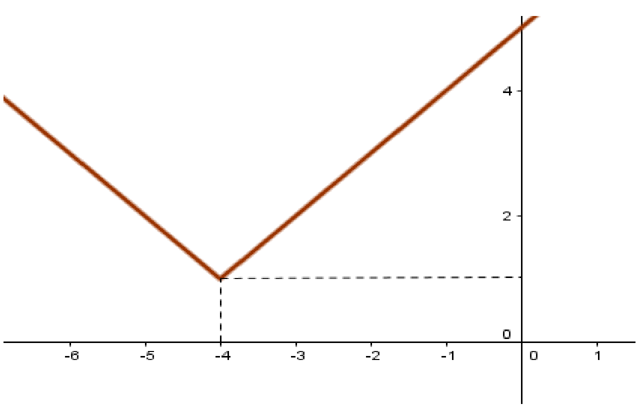
e) $f(x) = \log_{10} x$



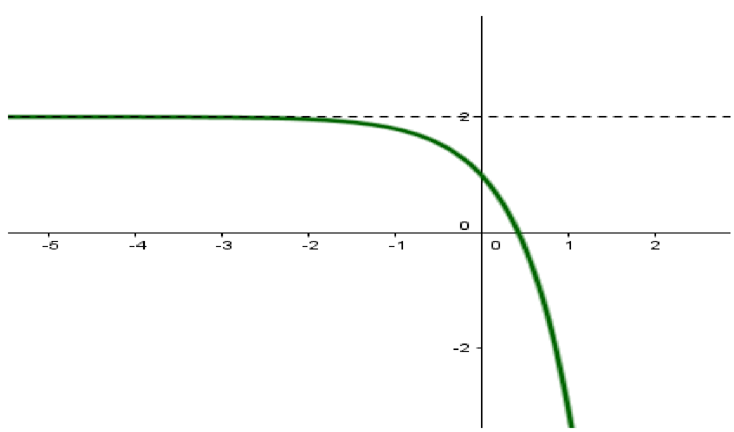
f) $f(x) = \sqrt{x}$



g) $f(x) = |x|$



h) $f(x) = 5^x$



2.- La ecuación de la función **h** que se obtiene cuando la gráfica de la función **g** tal que **g(x)** = $x^2 + 5$ se desplaza dos unidades abajo y siete hacia la izquierda es h(x) = ………

3.- Identifica la función que se desplaza, y la magnitud y sentido de los desplazamientos en cada caso. Luego traza la gráfica de cada una, y determina el dominio, imagen e intersección con los ejes:

a) $\boldsymbol{f(x) = (x+2)^2 + 3}$ b) $\boldsymbol{f(x) = -\sqrt{x+3} - 4}$

c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+2} + 1}$ d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 1}$

e) $\boldsymbol{f(x) = |x+4| + 1}$ f) $\boldsymbol{f(x) = -(x-2).(x+4)}$

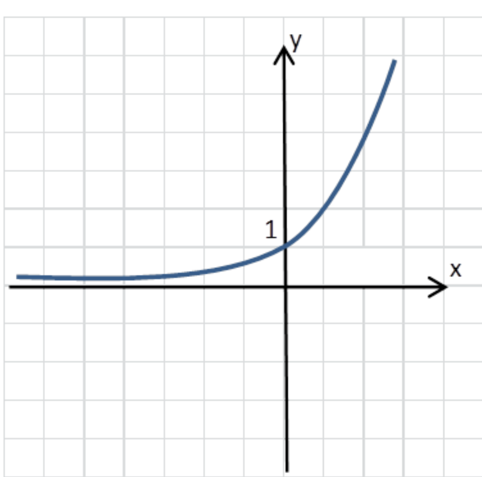
g) $\boldsymbol{f(x) = \frac{-1-x}{x-1}}$ h) $\boldsymbol{f(x) = 3 - \sqrt{1-x}}$

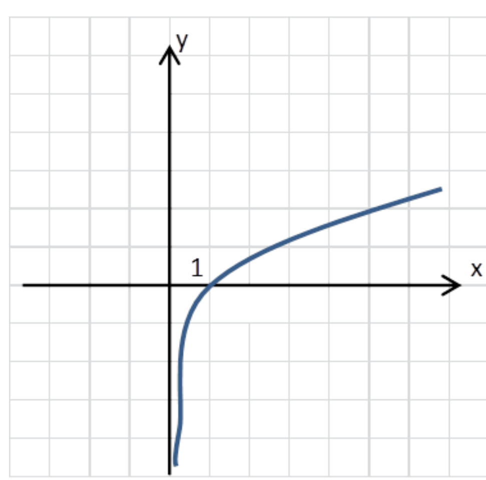
4.- Suponga que se da la gráfica de f. Escribir las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f, si:

a) Se desplaza 5 unidades hacia abajo
b) Se desplaza 4 unidades hacia la derecha
c) Se desplaza 1 unidades hacia la derecha y 5 arriba
d) Se desplaza 2 unidades hacia abajo y 4 la izquierda
e) Se refleja respecto del eje x y se desplaza 1 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda
f) Se desplaza 4 unidades abajo y se refleja respecto al eje y

5.- Dadas las gráficas de las funciones f y g tales que f (x) = 2^x y g(x) = ln x , indica dominio, imagen y las intersecciones con los ejes:

$f(x) = 2^x$ $g(x) = \ln x$





6.- Teniendo en cuenta las gráficas dadas en el ejercicio anterior, representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ c) $h(x) = \ln\left(\frac{x}{4} + 1\right)$

c) $p(x) = 2 + e^x$ e) $q(x) = 2 + log_2 x$ f) $r(x) = 2 - log_2 x$

7.- Obtiene la ecuación de la curva que se obtiene al reflejar f respecto a la recta y = x si $f(x) = \log_3(x+4)$

8.- Completa la siguiente tabla. Verifica que las funciones son uno a uno, y determina el dominio e imagen de las funciones y de sus inversas

f	$\mathbf{f^{-1}}$
$\ln\sqrt[3]{x}$	
	$3 + \ln x$
$e^{\frac{x}{2}}$	
	$\frac{e^x}{2}$

9.- Obtiene f tal que $(fog)_{(x)} = x$ si $g(x) = \log_3(x-7)$

10.- **<u>Desintegración exponencial</u>**:

Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante t está dado por: $A(t) = A_0 . e^{kt}$, *donde* A_0 *es la cantidad inicial y* $k < 0$ *es la constante de desintegración.*

a) Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 hs, la masa había decrecido en un 3%. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de t horas.
b) Encuentre la cantidad remanente después de 24 horas.
c) Encuentre el instante en que $A(t) = A_0 /2$, este se denomina vida media de la sustancia. ¿Cuál es la vida media de la sustancia en el inciso a?

11.- **Ley de Enfriamiento de Newton**:

Si un cuerpo u objeto se coloca en un medio (como aire, agua, etc) que se mantiene a una temperatura constante T_m y si la temperatura inicial del objeto es T_0, entonces la ley de enfriamiento de Newton pronostica que la temperatura del objeto en el instante t está dada por $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$, k < 0.

a) Un pastel se retira de un horno donde la temperatura era 350 °F y se coloca en una cocina donde la temperatura es constante a 75 °F. un minuto después se mide que la temperatura del pastel es 300 °F. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 6 minutos?
b) ¿En qué instante la temperatura del pastel es 80 °F?

4) Ejercicios adicionales

1.- Representar gráficamente indicando dominio e imagen.

a) $y = 1 - \sqrt[5]{x}$ b) $y = x^2 - 3x - 8$ c) $y = \frac{1}{x+3} - 1$

d) $y = -\sqrt{1 - x} + 1$ e) $y = 2x^3 - 3$ f) $y = |x + 5| - 3$

g) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y)^2}{4} = 16$

2.- Representar gráficamente la función f, siendo**:** $f(x) = \begin{cases} |x - 3| + 1 & \text{si} \quad |x - 3| > 3 \\ 4 & \text{si} \quad 0 \le x \le 6 \end{cases}$

En base al gráfico representado**:**

a) Determinar dominio e imagen de f

b) Determinar el o los valores $\{x \,/\, y = 0\}$