Trabajo Practico Nº 2: Paridad. Composición de funciones, función inversa.

No se debe juzgar a un hombre por sus cualidades, sino por el uso que hace de ellas.

F. Rochefoulcauld

1) Cuestionario

a) Indique qué paridad puede tener una función. Definirlas.
b) Qué relación hay entre simetría y paridad?
c) Cómo es el gráfico de una función creciente? y de una función decreciente?
d) Defina composición de funciones (analíticamente y mediante diagramas de Ven)
e) ¿Cuál es la operación inversa a la operación de composición?. ¿Cómo obtiene las funciones elementales que intervienen en una función compuesta?
f) Si conoce el gráfico de una función dada por $y = f(x)$, ¿ Qué transformaciones podría hacer a dicho gráfico y cómo quedaría modificada la fórmula en cada caso?

2) Ejercicios Resueltos

1.- Determinar la paridad de la función dada y en base a ello indique su simetría, siempre que sea posible**:**

$f(x) = \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x^3 - x}$

Solución

Recordar que si una función es par se cumple que $f(-x) = f(x)$ y si es impar $f(-x) = -f(x)$

Calculamos primero $f(-x)$**:** $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \sqrt[3]{(-x)^3 - (-x)}$

Como $(-x)^3 = -x^3$ y por identidades trigonométricas: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, se tiene que

$f(-x) = -\operatorname{sen} x + \sqrt[3]{-x^3 - (-x)} = -\operatorname{sen} x + \sqrt[3]{-(x^3 - x)} = -\operatorname{sen} x - \sqrt[3]{x^3 - x}$ **(1)**

(Sacando factor común (-1) dentro de la raíz cúbica y recordando que $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$)

Vemos que de acuerdo a lo obtenido $f(-x) \neq f(x)$ por lo tanto NO es una función par

Para ver si es impar calculamos $f(-x) = -\left(\operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x^3 - x}\right) = -\operatorname{sen} x - \sqrt[3]{x^3 - x}$ **(2)**

Comparando **(1)** y **(2)**se cumple que $f(-x) = -f(x)$, entonces se trata de una función impar, y como consecuencia será simétrica con respecto al origen.
Cabe acotar que si esto último no se hubiese cumplido, la función dada no tendría paridad y como consecuencia no sería simétrica ni con respecto al origen ni con respecto al eje y.

2.- Determinar la monotonía de la función f dada por $f(x) = 3.(x-4)^2 + 2$

Solución

Recordar que**:**

f es creciente en A $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in$ A**:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1)

f es decreciente en A $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in$ A**:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (2)

Para determinar en forma analítica la monotonía es necesario determinar primero el dominio de la función, en este caso Dom(f) = **R**

Luego, debemos determinar si se cumple alguna de las desigualdades (1)ó (2)

Sean $x_1, x_2 \in$ Dom(f) = **R** $/ x_1 < x_2 \Rightarrow \ x_1 - 4 < x_2 - 4 \ \not\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2 \\ (x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2 \end{cases}$ (3), como no se puede asegurar ninguna de las desigualdades, f no es monótona en su dominio

Veamos ahora si es sectorialmente monótona**:**

Para poder asegurar algunas de las desigualdades dadas en (3) es necesario que $(x_1 - 4)$ y $(x_2 - 4)$tengan igual signo. Consideramos entonces que**:** a) ambas expresiones son positivas o b) ambas expresiones son negativas

a) $(x_1 - 4) > 0 \ \wedge \ (x_2 - 4) > 0 \ \Rightarrow x_1 > 4 \ \wedge x_2 > 4 \Rightarrow \in x_1 \in (4, \infty) \wedge x_2 \in (4, \infty)$

Sean $x_1, x_2 \in (4, \infty) \ / \ \mathbf{x_1 < x_2} \Rightarrow x_1 - 4 < x_2 - 4 \Rightarrow (x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2 \Rightarrow$

$3(x_1 - 4)^2 < 3(x_2 - 4)^2 \Rightarrow 3(x_1 - 4)^2 + 2 < 3(x_2 - 4)^2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Vemos que se cumple la definición (1) $\therefore$ f es creciente en $(4, \infty)$

b) $(x_1 - 4) < 0 \ \wedge \ (x_2 - 4) < 0 \ \Rightarrow x_1 < 4 \ \wedge x_2 < 4 x_1 \in (-\infty, 4) \wedge x_2 \in (-\infty, 4)$

Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 4) \ / \ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 4 < x_2 - 4 \Rightarrow \quad (x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2 \Rightarrow$

$3(x_1 - 4)^2 > 3(x_2 - 4)^2 \Rightarrow 3(x_1 - 4)^2 + 2 > 3(x_2 - 4)^2 + 2$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Vemos que se cumple la definición (2)

$\therefore$ f es decreciente en $(-\infty, 4)$

Notar que cambió el sentido de la desigualdad. Porqué?

En resumen

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
f	Decreciente	Creciente

Nota: El punto 4 no se incluye en ninguno de los intervalos, pues es donde la función cambia la monotonía.

Composición de funciones

Una operación que se puede realizar entre 2 o más funciones y que no es algebraica es la composición**:**

La función compuesta de f y g o bien de f con g, está definida por**:**

$g \, o f : \text{Dom}(f) - \{x / f(x) \notin \text{Dom}(g)\} \longrightarrow R \ / \ (g \ o \ f)(x) = g(f(x))$

3.– Dadas las funciones f, g y h / $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = x^2 + 1$ y $h(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Definir**:** $(h \ o \ f)$, $(h \ o \ g)$

b) Calcular $(g \ o \ f)(1)$

Solución

a) Para definir una función debemos indicar fórmula, dominio y codominio de la misma

Por lo tanto, para definir (h o f) se procede en forma similar a como se hizo para operaciones algebraicas, primero se determina la fórmula (sin realizar ninguna simplificación ni operación) y luego se obtiene el dominio.

$(h \circ f)(x) = h(f(x))$ lo que indica que se tiene que reemplazar el argumento de h, por el valor f (x), es decir $h(f(x)) = h(2x+5) = \dfrac{1}{2x+5}$

Para calcular el dominio de esta nueva función se plantea que el denominador sea distinto de cero.

$2x + 5 \neq 0 \;\therefore\; x \neq -\dfrac{5}{2} \;\therefore\;$ Dom(h o f) = $\mathbf{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ por lo tanto la función queda definida así **:**

(h o f)**:** $\mathbf{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \to \mathbf{R}$ / $(h \circ f)(x) = \dfrac{1}{2x+5}$

Idem para (h o g)

Fórmula**:** $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Dominio**:** $x^2 + 1 \neq 0 \;\therefore$ Dom = **R** ; Codominio = **R**

Es decir la función queda definida así

(h o f)**:R→R** / $(h \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) El cálculo de $(g \circ f)(1)$ se puede realizar de dos maneras

I) Se determina primero la fórmula de $(g \circ f)(x)$ y luego se reemplaza el valor de x por 1

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+5)^2 + 1 \Rightarrow (g \circ f)(1) = (2.1+5)^2 + 1 = 50$

II) Por definición $(g \circ f)(1) = g(f(1))$

Se Obtiene primero $f(1) = 2.1 + 5 = 7$ y luego este valor se lo reemplaza en la expresión anterior (g o f) (1) = $g(f(1)) = g(7) = (7)^2 + 1 = 50$

3) Ejercicios para resolver en clases

1**.-** Estudiar la paridad de las siguientes funciones, dadas por sus fórmulas**:**

a) $y = |x| - x^4$

b) $y = \cos^3 x$

c) $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x^2}$

d) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

e) $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x + x^3$

2.- a) Completa de modo que f sea impar :$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x+1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} < -2 \\ \mathbf{x^2+1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{-2 \leq x} < 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \mathbf{si} \quad \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \mathbf{si} \quad \dots\dots\dots\dots \end{cases}$

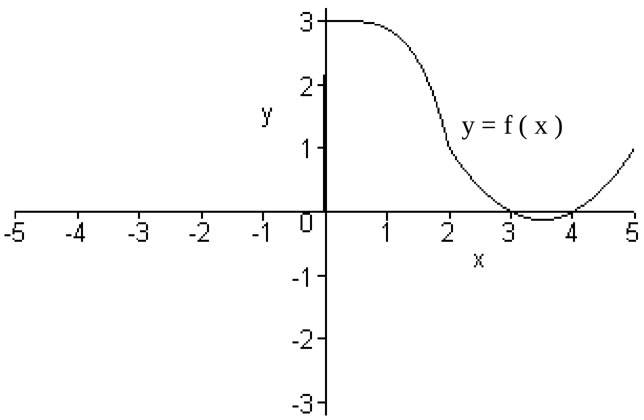
b) Completa de modo que f sea par: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -2 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{si} \quad \ldots\ldots\ldots \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{si} \quad \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

3.- A partir de las definiciones de funciones pares e impares, completar los siguientes enunciados a fin de que resulten proposiciones verdaderas, justificar su respuesta

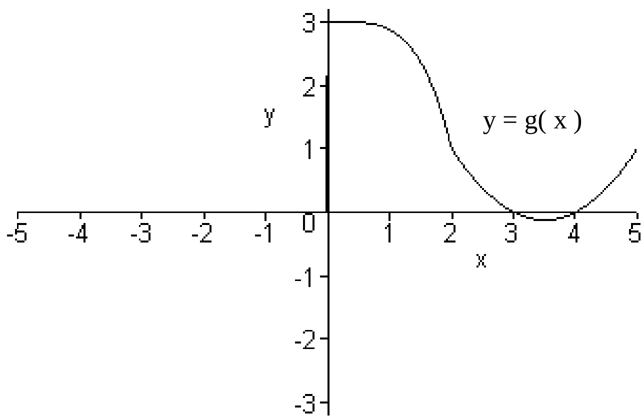
a) La suma de tres funciones pares es siempre ....
b) La suma de dos funciones impares es siempre ....
c) El producto de dos funciones impares es siempre ....

4.- Completar los siguientes gráficos, con la información que se suministra

i) f es par



i i) g es impar



A partir de la observación de los gráficos anteriores completar**:**

a) En intervalos simétricos con respecto al origen, la monotonía de las funciones pares ....
b) En intervalos simétricos con respecto al origen, la monotonía de las funciones impares ....

5.- Determina f o g , g o f , f o f y g o g, y calcula el dominio de la función obtenida para f y g tales que:

a) $f(x) = 3x^2 + 7,\ g(x) = \frac{1}{x-1}$ b) $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = x^3 - 8,\ g(x) = \sqrt[3]{x}$

6.- Completa la siguiente tabla:

	g (x)	**f (x)**	**(g o f)(x)**
A	$x^2 - 9$	$\sqrt[3]{x}$	
B	$x + 2$		e^{x+2}
C		$x + 5$	$\frac{3}{\lvert x-2\rvert}$
D	$x^2 + 1$		$x^2 + 3x + 6$
E	$6 + x$		$5 - \sqrt[3]{x}$

7.- Utiliza la tabla para obtener la respuesta correcta:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(x)	3	1	4	2	2	5
g(x)	6	3	2	1	2	3

a) f (g(1))= ………… b) g(f(1)) =…………

c)f(f(1)) = …………… d) g(g(1)) = …………

e) (g o f)$_{(3)}$ = ……….. f) (f o g)$_{(6)}$ = ……………

8.- Obtiene las funciones f , g y h tales que: H(x) = (f o g o h) $_{(x)}$

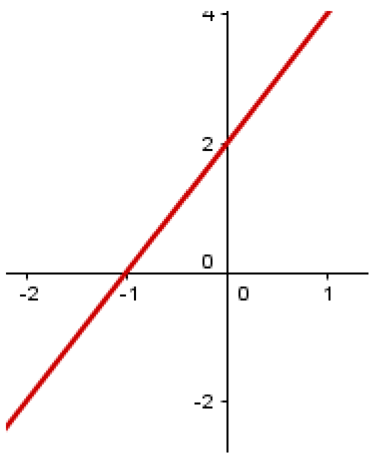
a) $H(x) = (x^3 \; + 1)^5$ b) $H(x) = \sqrt[8]{9 + |x^2|}$

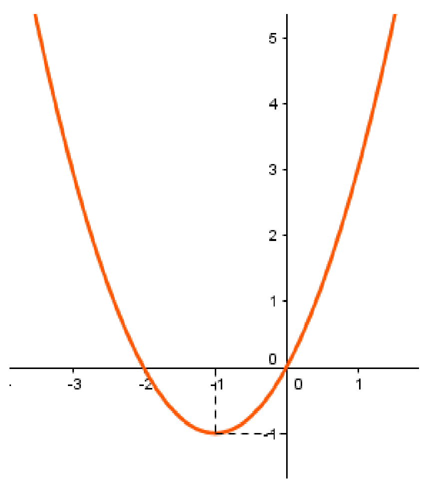
9.-Dadas las siguientes funciones, justifica que están definidas uno a uno en su dominio y sobre su imagen, y encuentra la función inversa. Determina el dominio y la imagen de la inversa.

a) $f(x) = 5x + 8$ b) $g(x) = 9 + \frac{1}{x^7}$ c)$h(x) = \sqrt[5]{x + 1}$

10.- Dadas las siguientes funciones, verifica que son uno a uno, y a continuación indica el dominio y la imagen para las funciones dadas y sus inversas. Traza en un mismo gráfico las funciones y sus inversas, y observa la simetría respecto de la recta: y = x.

a) $f(x) = 2\,x + 2$ b) $g(x) = (x + 1)^2 - 1$





11.- Determina si la función dada es uno a uno, en su dominio y sobre su imagen, examinando su gráfica. Si es así, encuentra la función inversa y determina dominio e imagen de esta función:

a) $y = 5^x$ b) $y = 6x + 1$ c) $y = x^2 - 4x$ d) $y = x^3 + 2$ e) $y = \frac{9+x}{x+3}$

12.- Completa con la respuesta correcta:

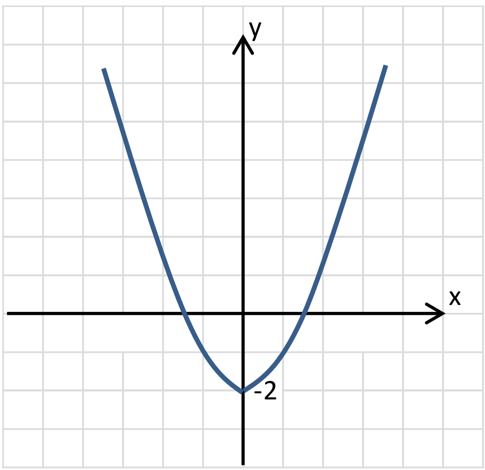
a) Si f es una función uno a uno tal que $f(5) = 8$, entonces $f^{-1}(8) =$ ………………

b) Si h tal que $h(x) = K.(2 - x - x^3)$ es uno a uno, y $h^{-1}(4) = -5$, entonces $K =$ ……

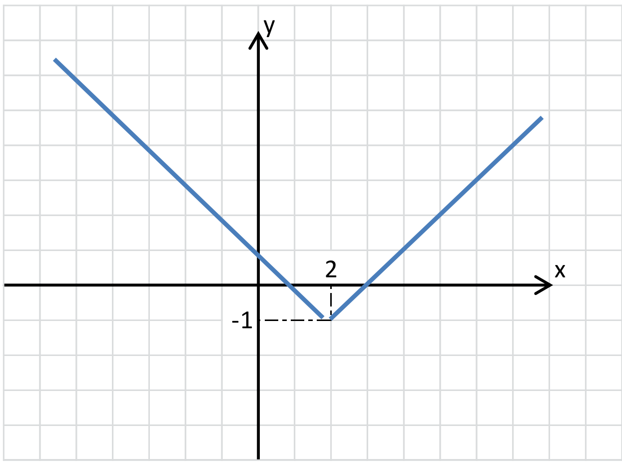
c) Dada la función g tal que $g(x) = x^3 + 2x - 1$, entonces $g^{-1}(x) = 5$ si $x =$ ……

13.- Dadas las siguientes funciones y sus correspondientes gráficas, redefine las funciones eliminando parte de la gráfica de manera tal que resulte una función uno a uno. Luego representa gráficamente la inversa. Da el dominio y la imagen de la función uno a uno propuesta, y de su inversa.

a) $f(x) = -2 + x^2$



b) $f(x) = |x - 2| - 1$



4) Ejercicios adicionales

Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una N

1.- Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$ la función (3f + g) se define como: ☐

A) $[-3,\infty) - \{2\} \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$

B) $[-3,\infty) - \{2\} \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{3x-6} + \sqrt{x+3}$

C) $[-3,\infty) \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$

D) $(-3, \infty) - \{2\} \to R/\ y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$

2 .-Dadas f y g / g(x) = $(x-3)^2-5$ y f (x) = $\sqrt{x+6}+3$, la función $g \circ f$ se define como: $\boxed{}$

A) $R \to R \,/\, y = x+1$

B) $[-6,\infty) \to R \,/\, y = x+1$

C) $R \to R \,/\, y = |\, x+6 \,| - 5$

D) $R \to R \,/\, y = \sqrt{(x-3)^2+1} + 3$