Trabajo Práctico Nº 1: Inecuaciones. Funciones: Dominio e imagen, gráficos, operaciones algebraicas.

Los grandes conocimientos engendran las grandes dudas.
Aristóteles

1) Cuestionario

a) Indique las operaciones algebraicas que cambian el sentido de una desigualdad, y las que lo mantienen.
b) Defina valor absoluto de una expresión. Indique su interpretación gráfica (en términos de distancia).
c) ¿Qué es una función? ¿Qué se entiende por dominio e imagen?
d) ¿A qué se llama variable dependiente y variable independiente de una función?
e) ¿Qué elementos debe indicar para definir una función?
f) Si para identificar una función se da únicamente una fórmula, ¿cómo se puede obtener el dominio de la misma?
g) ¿Podría determinar la imagen de una función sin conocer su dominio?
h) ¿Cómo obtiene dominio e imagen a partir de la representación gráfica de una función?
i) Qué operaciones algebraicas se pueden realizar entre funciones? Definirlas

2) Ejercicios Resueltos

Un enunciado, una tabla de valores, una fórmula y una gráfica son las cuatro formas de representar una función.

Aquí van algunos consejos para ayudarte a organizar tu trabajo

- ***Identifica las variable involucradas en el enunciado : la variable independiente y la variable dependiente***
- ***Identifica en el enunciado y también calcula algunos pares de variables relacionados***
- ***Confecciona una tabla de valores***
- ***A partir del procedimiento empleado para obtener los pares relacionados, trata de encontrar una fórmula***
- ***Si tienes una tabla con pares de valores ya puedes representarlos en sistema de ejes cartesianos ortogonales***

Te presentamos a continuación un caso resuelto:

Caso Resuelto

Las maneras de representar una función real

El enunciado es el siguiente:

Un campo petrolero con 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios. Por cada nuevo pozo que se perfore, la producción diaria de cada pozo decrece en 5 barriles.

Este enunciado define la producción diaria total del campo petrolero a partir del número de nuevos pozos perforados.

Sean $\begin{cases} \textbf{x} : \text{ la cantidad de nuevos pozos perforados (variable independiente) y} \\ \textbf{P} : \text{producción diaria total del campo petrolero, en barriles diarios (variable dependiente).} \end{cases}$

Cuando no hay perforaciones nuevas (x = 0), estamos en la situación inicial con 20 pozos en producción y una producción diaria de 4000 barriles.

La producción de cada pozo es de 200 barriles: $\frac{4000 \text{ barriles diarios}}{20 \text{ pozos}}$ **= 200 barriles / pozo**

Ahora bien, si ponemos, por ejemplo tres nuevos pozos en producción (x=3), el número de pozos en producción es (20 + 3) y la producción diaria de cada pozo que estaba en 200 barriles disminuye en 5 barriles por cada pozo nuevo que entra en producción.

Como (200 – 5. 3) es la producción diaria de cada pozo, si se multiplica por el número total de pozos (20 + 3) se obtiene la producción diaria total cuando entran 3 nuevos pozos en producción:

$$(200 - 5 . 3) . (20 + 3)$$

De este modo si el número de pozos que entra en producción es x la cantidad de barriles que se producen por día resulta $P(x) = (200 - 5x) (20 + x)$

A continuación se indica en detalle cómo se obtiene esta expresión para P:

x nuevos pozos	P Barriles diarios	P Barriles diarios
0	200 x 20 Producción diaria de cada pozo multiplicada por la cantidad de pozos	4.000
1	(200 – 5.1) . (20 + 1)	4.095
2	(200 – 5.2) . (20 + 2)	4.180
3	(200 – 5.3) . (20 + 3)	4.255
4	(200 – 5.4) . (20 + 4)	4.320
...	...	...
...	...	
...	...	
x	(200 – 5 x) . (20 + x)	

Este enunciado expresa una correspondencia tal que a todo número de nuevos pozos perforados le hace corresponder una única cantidad de barriles diarios producidos. Esta asignación o correspondencia es una función. Decimos que la cantidad de barriles diarios producidos es una función del número de nuevos pozos perforados.

Pudimos construir una tabla de valores para esta función y también obtener una fórmula algebraica

<u>Tabla</u>

Cantidad de nuevos pozos x	Cantidad de barriles diarios P	Cantidad de nuevos pozos x	Cantidad de barriles diarios P
0	4.000	15	4.375
1	4.095	20	4.000
2	4.180	25	3.375
3	4.255	30	2.500
4	4.320	35	1.375
10	4.500	40	0

<u>Fórmula</u>

$$P(x) = (200-5x) (20+x)$$

x es el número de pozos nuevos
P es la cantidad de barriles que produce el campo por día

Las siguientes son también fórmulas que se corresponden con el enunciado y la tabla dados

$$P(x) = 4.000 + 100\,x - 5\,x^2$$

$$P(x) = -5\,(x-10)^2 + 4.500$$

El conjunto de números reales para los que existe un único correspondiente constituye el dominio de la función y el conjunto de números reales que asigna esa correspondencia se llama imagen de la función

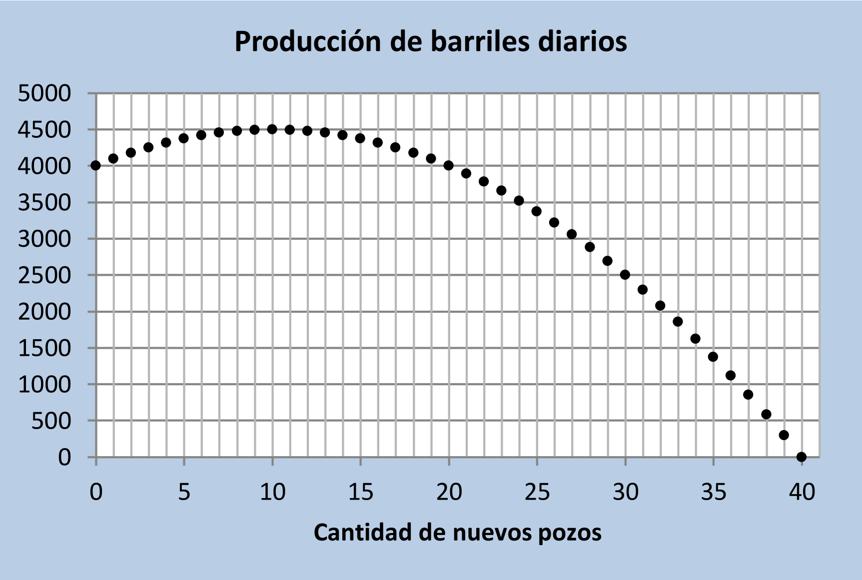
Para determinar el dominio de P debemos tener en cuenta que el número de nuevos pozos debe ser tal que al entrar en producción no sequen a los restantes pozos.

Entonces $200 - 5\,x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 40$ **y el dominio de** $P = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 40\}$
La siguiente expresión define a la función P

$$P : \{0, 1, 2, 3, \ldots, 40\} \to \mathbb{R} \;/\; P(x) = -5\,(x-10)^2 + 4.500$$

Representación Gráfica

La función puede definirse también mediante la representación gráfica en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. En este caso resulta:



Los pares ordenados (x, P) pertenecen a una parábola con vértice en (10, 4.500) y cóncava hacia abajo. Entonces el valor máximo de la producción del yacimiento es de 4.500 barriles y sucede cuando se ponen a producir 10 nuevos pozos.

Como vimos un enunciado, una tabla de valores, una fórmula y una gráfica son las cuatro maneras posibles de representar a una función.

Maneras de representar a una función	
Verbalmente	Mediante una descripción en palabras
Numéricamente	Con una tabla de valores
Visualmente	Mediante una gráfica
Algebraicamente	Por medio de una fórmula explícita

Con frecuencia resulta útil pasar de una representación a otra para conocer e interpretar la función. La representación más valiosa es la algebraica porque significa que hemos logrado representar el modelo del problema descrito con palabras. Si tenemos la fórmula podemos confeccionar una tabla de valores y representar gráficamente.

Más ejercicios resueltos:

1.- Calcular el dominio de cada una de las funciones que se indica a través de su fórmula.

a) $y = f(x) = x\sqrt{2x - 3}$ b) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ c) $y = -\sqrt[4]{x-2} + \dfrac{1}{x-5}$

d) $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3-t}}$ e) $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

I) En a) calcular $f(8)$, $f(a+1)$

II) En e) calcular si existe $f(-2)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(4)$

Solución

Encontrar el dominio de una función significa encontrar todos los valores de la variable independiente para los cuales los valores de la variable dependiente sean valores reales. Además el enunciado o fórmula que define a la función debe tener sentido para los valores de dichas variables.

a) Para que exista y es necesario que el radicando de las raíces de índice par (aquí raíz cuadrada) sea mayor o igual a cero, es decir que en este caso el planteo es: $2x - 3 \geq 0$. La solución de esta inecuación es el dominio de la función.

$x \geq \dfrac{3}{2}$ es decir $S_T = \left[\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ $\therefore$ $\text{Dom}(f) = \left[\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

b) En este caso el planteo es: $x^2 + x - 6 \neq 0$ (recordar que no se puede dividir por cero)

Las raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$ son: $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$.

Entonces el dominio es $\text{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{-3, 2\}$

c) Para esta función el planteo es: $x - 2 \geq 0 \;\wedge\; x - 5 \neq 0$ resolviendo e intersecando ambos conjuntos el dominio es: $\text{Dom}(f) = [2, \infty) \cap (R - \{5\}) = [2, \infty) - \{5\}$

d) Para determinar el dominio de esta función se debe tener en cuenta únicamente que $3 - t \neq 0$, ya que la raíz es de índice impar y como se sabe las raíces de índice impar existen para todos los números reales. Entonces $t \neq 3$. Por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{3\}$

e) Se trata de una función definida sectorialmente y el dominio es el conjunto formado por la unión de cada uno de los subconjuntos para los cuales está definida la función.

Es decir $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup [1, \infty)$ $\therefore$ $\text{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

I) En a) para calcular f (8) es necesario reemplazar en la formula el valor de x por 8 y realizar las operaciones

Entonces $f(8) = 8\sqrt{2.8-3} = 8\sqrt{13}$

$f(a+1) = (a+1)\sqrt{2(a+1)-3} = (a+1)\sqrt{2a-1}$

II) En este caso como la función está definida sectorialmente es necesario determinar primero a que sector pertenece y de esta manera saber en qué fórmula reemplazar

Entonces para el cálculo de $f(-2)$, determinamos que $x = -2$ pertenece al primer sector ($x < 0$), por lo tanto en la fórmula $y = -x^2$ hay que reemplazar x por -2**:** $f(-2) = -(-2)^2 = -4$

De la misma forma se procede para los otros valores**:**

$f(1/2) = 3$

$f(0)$ no existe, ya que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función

$f(4) = 2.4 - 1 = 7$

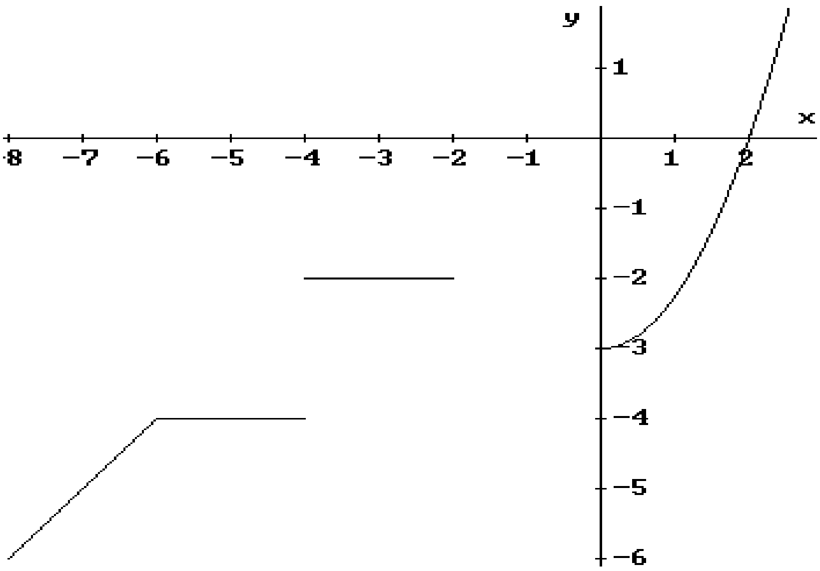
2.- Sea la función g definida por el gráfico que se indica, hallar:

a) $g(-3)$, $g(2)$, el valor de **a** si $g(\mathbf{a}) = -5$

b) $\{ x / g(x) \geq 0 \}$

c) Dominio e Imagen de g

d) Img (g), si Dom (g) $= (-7,-1]$



Solución

a) Para saber qué valor toma la función cuando $x = -3$, trazamos una recta vertical que pasa por $x = -3$, hasta que corte al grafico de g ,luego se traslada este valor al eje y , con lo que se obtiene el valor de $g(-3) = -2$

Del mismo modo se procede para calcular $g(2) = 0$.

$g(a) = -5$. En este caso se da el valor de la función, es decir el valor de y, y se debe encontrar el valor de la variable independiente. Para determinar el valor **a**, se traza una recta horizontal por $y = -5$ hasta cortar al grafico, luego se traslada este valor hasta al eje x, con lo que se obtiene $\mathbf{a} = -7$

b) En este caso se debe considerar la parte del gráfico en el cual el valor de la función (y) es mayor o igual a cero , es decir la parte del gráfico que está por encima del eje x o en el eje x, por lo tanto: $x \in [-2, 0) \cup [2, \infty)$

c) En este caso debemos considerar todo el gráfico, es decir que:
Dom (g) = **R** ; Imagen (g) = $(-\infty, -4] \cup [-3, \infty)$

d) Se debe determinar los valores de y, para $-7 < x \leq -1$. Entonces $y \in (-5, -4] \cup \{-2, 0\}$

3.– Dadas las funciones f, g y h / f (x) = 2x + 1, g (x) = $\sqrt{x+2}$ y h (x) = $\dfrac{3x}{x-2}$

a) Definir: f + 2g y g^2/h
b) Calcular: (g + 2 f)(7)

Solución

A partir de 2 o más funciones f y g se puede definir otras funciones que resultan de operaciones algebraicas entre f y g
Función Suma : f + g : Dom f $\cap$ Dom g $\longrightarrow$ **R** / (f + g)(x) = f (x) + g (x)
Función Diferencia : f – g : Dom f $\cap$ Dom g $\longrightarrow$ **R** / (f − g)(x) = f (x) − g (x)
Función Producto: f . g : Dom f $\cap$ Dom g $\longrightarrow$ **R** / (f . g)(x) = f (x) . g (x)
Función Cociente : f / g : Dom f $\cap$ Dom g $-\{x/g(x) = 0\}$ $\longrightarrow$ **R** / (f / g)(x) = f (x) / g (x)

a) Para definir una función debemos indicar fórmula, dominio y codominio de la misma.

Fórmula: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + 2\sqrt{x+2}$

Para determinar el dominio de la nueva función, la forma más fácil de hacerlo es la siguiente: obtener la fórmula de la función, pero no realizar ninguna operación algebraica en ella, luego obtener el dominio a partir de dicha fórmula. Una vez calculado el dominio, recién procedemos a simplificar la fórmula, si es posible, por lo tanto el planteo para este caso es:

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \; ; \; \text{Dom}(f+g) = [-2, \infty)$$

Como codominio se toma el conjunto más amplio con el que se está trabajando, en cualquier caso se puede tomar R
Entonces la función queda definida así :

$$f + 2g: [-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \,/\, (f + g)(x) = 2x + 1 + 2\sqrt{x+2}$$

Idem para g^2/h

$$(g^2/h)(x) = \frac{[g(x)]^2}{h(x)} = \frac{(\sqrt{x+2})^2}{\dfrac{3x}{x-2}}$$

Planteo para el cálculo del dominio:

$$x + 2 \geq 0 \;\wedge\; 3x \neq 0 \;\wedge\; x - 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(g^2/h) = [-2, \infty) - \{0, 2\}$$

Codominio = **R** . Por lo tanto la función queda definida así:

$$g^2/h: [-2, \infty) - \{0,2\} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, (g^2/h)(x) = \frac{(\sqrt{x+2})^2}{\dfrac{3x}{x-2}} = \frac{x^2 - 4}{3x}$$

b) (g + 2 f)(7) = g (7) + 2 f (7), por lo que podemos calcular g (7) y f (7) y luego reemplazar
g (7) = 3 , f (7) = 15 entonces (g + 2 f) (7) = 33

3) Ejercicios para resolver en clases

1.- Resolver las siguientes desigualdades. En a), b) y c) resolverlas por dos caminos distintos:

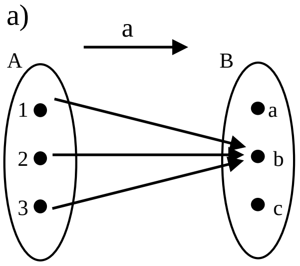
a) $\frac{7}{x} < 1$ b) $-x^2 + 6x - 8 \leq 0$ c) $5x^2 - 10x + 1 < 16$ d) $(x^2 + 10)(x - 5) > 0$

e) $\frac{5x - 8}{x + 2} \leq 0$, Sabiendo que $x < -2$ f) $\frac{3}{-8 + x} \leq -6$ g) $\frac{(x + 6)(x - 4)}{x} < x + \frac{10}{x}$

h) $x^5 - x \leq 0$

2.- Algunas de las siguientes presentaciones corresponden a funciones. En los casos afirmativos indicar dominio e imagen.

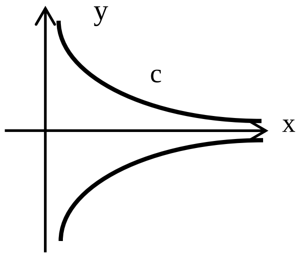
a)



b)

b: $R \rightarrow R \,/\, y = x^2$

c)



d)

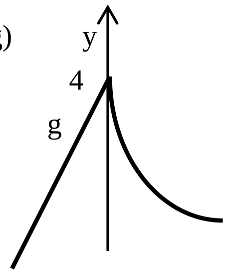
x	3	5	3	4	5
y	1	2	3	4	5

e)

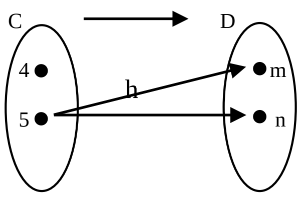
Kg	$
8	24
9	27
10	30
11	33

f) m: $R \rightarrow R \,/\, y^2 = x$

g)



h)



i)

La temperatura ambiente de un lugar se registra durante un día. A cada hora se le asigna la temperatura en ese instante.

3.- a) Expresar el área de un cuadrado como función de su diagonal.
b) Escribir la fórmula del volumen de una esfera en función de su superficie.
c) Cuando el sol ilumina al mástil de una bandera de 6 m de altura produce una sombre de longitud S. Escribir S en función del ángulo que forman los rayos del sol con el piso.

4.- Un finquero quiere cercar con alambre tejido un terreno rectangular de 500 m2 y dividir su superficie en cuatro partes iguales colocando el alambre paralelo al menor de sus lados. Exprese la función que da la longitud total de alambre tejido para cercar y dividir el terreno en función del menor de los lados del mismo. Como podríamos determinar las dimensiones del terreno tales que la longitud del alambre empleado se la menor posible?

5.- Las siguientes tablas corresponden a una función lineal. Para cada una de ellas completa la tabla, representa gráficamente los datos de la tabla y escribe la fórmula que los relaciona

TABLA I

Tiempo en horas	0	1	2	3			
Distancia recorrida en km	0	40			200	800	20

TABLA II

Capital Invertido en $	0	500	700	250		
Interés Percibido en $	0	10			15	750

6.- Encuentra las coordenadas del vértice y representa gráficamente las parábolas definidas por las expresiones:

a) $y = -6x^2 - 24x - 16$ b) $y = x^2 - 14$ c) $y = (x + 5)(x - 7)$

A partir de las gráficas determina la imagen en cada caso.

7.- Dada f tal que $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{(x+7)^2}}$, calcula:

f (1) , f (0), f (– 7) , f (1/3), f ($\frac{a}{b}$) y f (x – 7)

8.- Dada la función valor absoluto que se denota f (x) = | x | y se define así :

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ -\mathbf{x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

determine el dominio y la imagen y represente gráficamente

9.- Dada la función máximo entero o parte entera, que se denota f (x) =$[x]$ y se define :

$[x]$ = n si n ≤ x < n+1 , n ∈ Z

a) Determina el dominio, la imagen y representa gráficamente.
b) Obtiene $\left[\frac{7}{2}\right]; \left[\frac{2}{9}\right]; \left[-\frac{9}{2}\right]$; $[0{,}978]$; $[7{,}0023]$; $[-0{,}12]$

10.- Define las funciones f + g , f – g , f . g , f / g , g / f, y determina el dominio para f y g tales que:

a) $f(x) = 3x - x^2$, $g(x) = 7 + x$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$, $g(x) = \frac{4}{x^2-9}$

11.- Dadas f y g tales que $f(x) = 3x^2 - x$,$g(x) = \sqrt{x + 10}$

a) Calcula:(2 f – 6 g)$_{(-1)}$ b) Define: f / g y g / f

Define g tal que g sea una función par. Representa gráficamente a las funciones f y g.

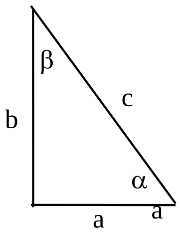
4) Ejercicios adicionales

1.- Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una **N**

La solución de la inecuación $x^2 - x - 6 \le 0$ es: $\boxed{}$

A) $[-2, 3]$ **B)** $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ **C)** $(-\infty, 0]$ **D)** $(-\infty, -2]$

2.- Dado el triángulo rectángulo:



Expresa el perímetro P y el área A del triángulo en función de la longitud de los lados.
Expresa el área A como función de a (el cateto menor del triangulo) y el ángulo α
Expresa c , la longitud de la hipotenusa, como función de a y de α
Expresa el perímetro P como función de a y α

3.- Un globo de aire caliente que se eleva verticalmente de un campo plano es rastreado por un localizador que está a 500 mts del punto de despegue. Expresa la altura que se eleva el globo como función del ángulo que forman el suelo y la recta que va del localizador al globo.

4.- Escriba en el recuadro la letra correspondiente a la respuesta correcta. Si ninguna de las respuestas es correcta escriba una **N**

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$ la función (3f + g) se define como: $\boxed{}$

A) $[-3,\infty)-\{2\} \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$

B) $[-3,\infty)-\{2\} \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{3x-6} + \sqrt{x+3}$

C) $[-3,\infty) \to R \,/\, y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$

D) $(-3, \infty) - \{2\} \to R/ \; y = \dfrac{3x-3}{x-2} + \sqrt{x+3}$