INTERVALOS

Son los subconjuntos de la recta Real que contienen al menos dos números y contienen también todos los números Reales que existen entre dos cualesquiera de sus elementos.

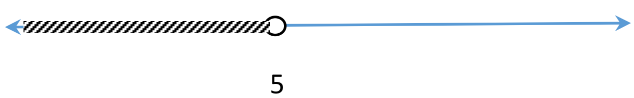
Los intervalos pueden ser **abiertos**, **cerrados** o **semiabiertos**. Además pueden ser **finitos** (con una longitud definida, finita) o **infinitos** (con una longitud infinita).

Los extremos de los intervalos se indican con puntos **vacíos** para indicar que el punto **no** pertenece al intervalo (y se denota con un **paréntesis**), o **rellenos** para indicar que el punto **si** pertenece al intervalo (se denota con un **corchete**). El **∞** no es considerado un número Real, por lo tanto **no** es un extremo y vá con **paréntesis**.

Veamos algunos ejemplos:

COMO DESIGUALDAD — INTERPRETACIÓN GRÁFICA — COMO INTERVALO

$X < 5$



$(-\infty ; 5)$

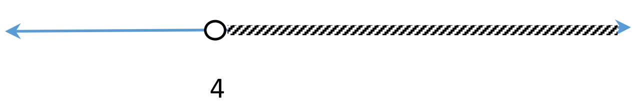
abierto, infinito

$X \leq 7$

$(-\infty ; 7]$

semiabierto, infinito

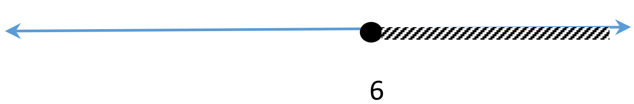
$X > 4$



$(4 ; \infty)$

abierto, infinito

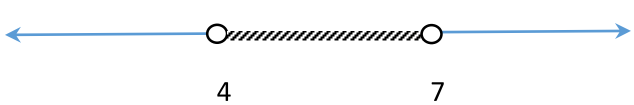
$X \geq 6$



$[6 ; \infty)$

semiabierto, infinito

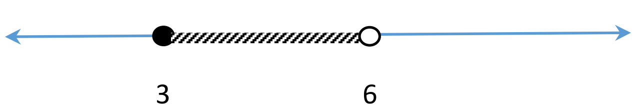
$4 < X < 7$



$(4 ; 7)$

abierto, finito

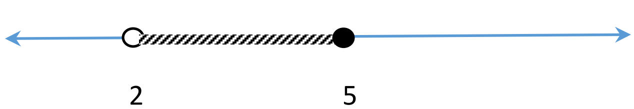
$3 \leq X < 6$



$[3 ; 6)$

semiabierto, finito

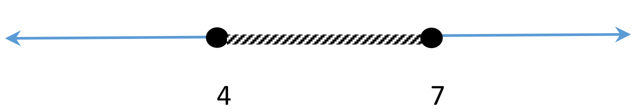
$2 < X \leq 5$



$(2 ; 5]$

semiabierto, finito

$4 \leq X \leq 7$



$[4 ; 7]$

cerrado, finito

UNIÓN DE INTERVALOS

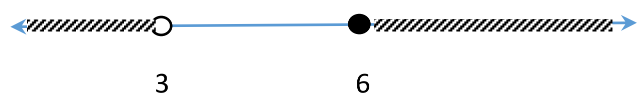
Son los subconjuntos de la recta Real que contienen a los elementos **comunes y no comunes**, es decir a **todos** los elementos o números Reales que existen en todos los intervalos que se unen (pueden ser 2 ó más).

Para expresar la **UNIÓN** en los **elementos** se utiliza "**ó**" y se denota con el símbolo: $\vee$

Para expresar la **UNIÓN** en los **intervalos** se utiliza el símbolo: **U**

Veamos un ejemplo:

$\{X \, \mathcal{E} \, \mathbf{R} \, / \, X < 3 \ \vee \ X \geq 6\}$



$(-\infty ; 3] \cup [6 ; \infty)$

INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

Son los subconjuntos de la recta Real que contienen únicamente a los elementos **comunes**, es decir a los elementos o números Reales que **se repiten** en los intervalos que se intersecan.

Para expresar la **UNIÓN** en los **elementos** se utiliza "**y**" denotándose con el símbolo: **^**

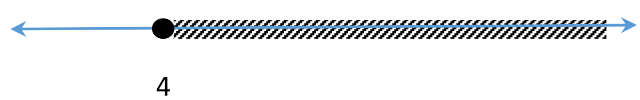
Para expresar la **UNIÓN** en los **intervalos** se utiliza el símbolo: $\cap$

Veamos un ejemplo:

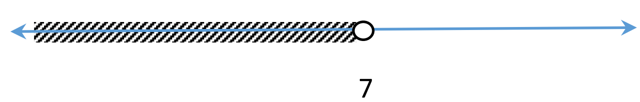
Queremos representar y denotar como intersección de intervalos la expresión:

$\{X \, \mathcal{E} \, \mathbf{R} \, / \, X \geq 4 \ \wedge \ X < 7 \}$

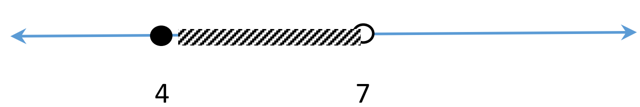
Para ello, primero representemos: $\{X \, \mathcal{E} \, \mathbf{R} \, / \, X \geq 4 \}$ que corresponde al intervalo: $[4 ; \infty)$



Luego representamos: $\{X \, \mathcal{E} \, \mathbf{R} \, / \, X < 7 \}$ que corresponde al intervalo: $(-\infty ; 7]$



Finalmente representamos la intersección (la superposición o solapamiento, solamente las zonas comunes) de ambos intervalos, que corresponde a: $\{X \, \mathcal{E} \, \mathbf{R} \, / \, X \geq 4 \ \wedge \ X < 7 \}$ y se expresa como intersección de intervalos así: $(-\infty ; 3] \cap [6 ; \infty)$



RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Es importante conocer previamente las Propiedades (Reglas) para la resolución de las desigualdades:

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
2. Si $a < b \wedge c < d$, entonces $a + c < b + d$
3. Si $a < b \wedge c > 0$, entonces $a.c < b.c$
4. Si $a < b \wedge c < 0$, entonces $a.c > b.c$
5. Si $0 < a < b$, entonces $1/a > 1/b$

Veamos ahora un ejemplo acerca de cómo se procede. Queremos resolver la siguiente inecuación:

$$2x^2 - 2 \leq x^2 - x$$

Solución

Para resolver esta inecuación vamos a agrupar todos los términos en un solo miembro de la desigualdad es decir:

$$2x^2 - 2 - x^2 + x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 \leq 0$$

Vemos que nos queda una inecuación cuadrática, la que podemos resolver de distintas maneras**:**

I) <u>Completando cuadrados</u>

$$x^2 + x - 2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

por lo tanto queda

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \leq 0 \quad \therefore \quad (x + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$$

aplicando raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2} \leq \sqrt{\frac{9}{4}}$$

Recordando propiedades de valor absoluto:

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2}$$

Queda por resolver una inecuación con valor absoluto, que se puede resolver aplicando propiedad de valor absoluto, es decir:

$$-\frac{3}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 1$$

por lo tanto la solución es**:** $\boxed{S_T = [-2, 1]}$

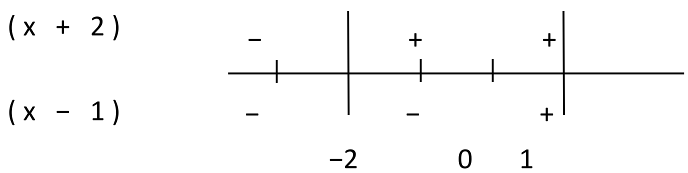
II) <u>Mediante factoreo e interpretación gráfica</u>

Se factorea la expresión cuadrática encontrando las raíces de la ecuación cuadrática $\mathbf{x^2 + x - 2 = 0}$

Las raíces son: $\mathbf{x_1 = -2}$ **y** $\mathbf{x_2 = 1}$

La inecuación queda: $\mathbf{(x + 2).(x - 1) \leq 0}$

Se esquematiza esta expresión en la recta real:



Se aplica la regla de los signos, es decir se busca aquel sector de la recta real donde los signos de los factores son distintos.

En el esquema se pueden observar que la recta real queda dividida en 3 regiones: $(-\infty, -2)$; $(-2, 1)$ y $(1, \infty)$.

En una sola de éstas regiones los signos de los factores son distintos, por lo que $\boxed{S_T = [-2, 1]}$

III) <u>Mediante factoreo y aplicación de la regla de los signos</u>

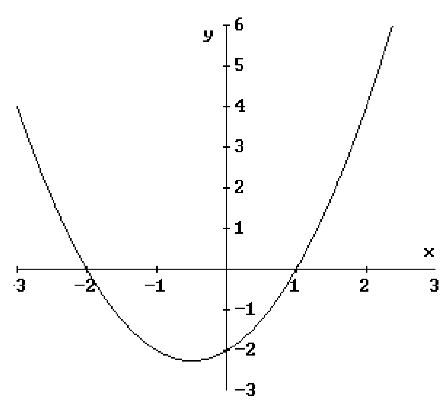
Un producto es negativo cuando los factores tienen distinto signo; por lo que se pueden presentar cualquiera de las dos posibilidades:

i) $\mathbf{(x + 2) \geq 0 \wedge (x - 1) \leq 0}$ $\vee$ **ii)** $\mathbf{(x + 2) \leq 0 \wedge (x - 1) \geq 0 \Rightarrow}$

i) $\mathbf{x \geq -2 \wedge x \leq 1 \Rightarrow S_i = [-2, 1]}$ $\vee$ **ii)** $\mathbf{x \leq -2 \wedge x \geq 1 \Rightarrow S_{ii} = \varnothing}$

$$\Rightarrow \mathbf{S_T = S_i \cup S_{ii} = [-2, 1] \cup \varnothing} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{S_T = [-2, 1]}}$$

IV) <u>Mediante la representación en un sistema de ejes coordenados cartesianos</u>:



Si agrupamos todos los términos en el primer miembro quedará:

$$\mathbf{x^2 + x - 2 \leq 0}$$

Ahora consideramos la fórmula:

$$\mathbf{y = x^2 + x - 2}$$

cuya representación gráfica es la parábola que se muestra.

Ahora en el gráfico nos fijamos para qué valores de x se verifica que:

$$\mathbf{y \leq 0.}$$

La respuesta es $\boxed{[-2, 1]}$, que es la solución buscada.