Capítulo 5

Autómatas de Pila

Índice General

5.1. Introducción.

La tarea de reconocimiento de los LCL se realiza por medio de un tipo de autómata denominado *autómata de pila*, AP.

Definición 5.1 *Un Autómata de Pila es una séptupla*

$$A = \langle \Sigma, Q, \Gamma, f, q_0, Z_0, F \rangle$$

donde

Σ *es el alfabeto de entrada,*

Q *es el conjunto de estados, que es finito y no vacío,*

Γ *es el alfabeto de la pila,*

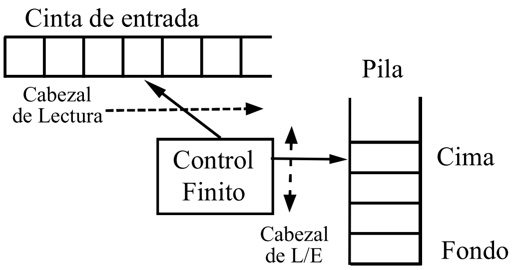
q_0 *es el estado inicial,*

Z_0 *es un símbolo especial, denominado* fondo de pila, $Z_0 \in \Gamma$,

F *es el conjunto de estados finales,* $F \subseteq Q$,

f *es la función de transición,* $f : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \longrightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$.

Una descripción informal de tal autómata es la representada en la siguiente figura:

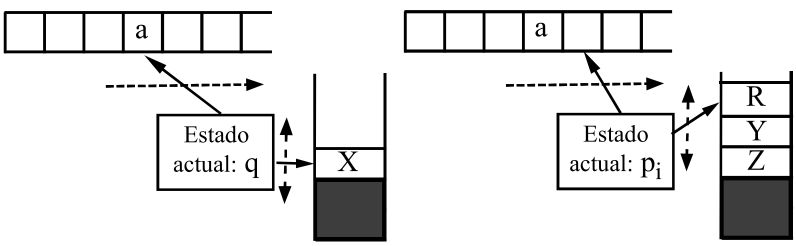


El autómata de pila consta de una cinta de entrada dividida en celdas, cada una de las cuales puede almacenar un sólo símbolo. El acceso a cada celda se realiza por medio del cabezal lector, cuyo movimiento siempre es de izquierda a derecha. El autómata posee un cabezal adicional de lectura/escritura que sólo puede leer o escribir sobre la cima de una pila. Por eso en este autómata se dispone de dos alfabetos de símbolos, el alfabeto de la cinta de entrada, Σ, y el de la pila, Γ.

El funcionamiento de este autómata es el siguiente: dado un *símbolo de la cinta de entrada* o bien la cadena vacía[1] (que equivale a no leer el símbolo que se encuentra bajo el cabezal de lectura), el *estado actual* del autómata (especificado en el control finito) y el símbolo que esté en la *cima de la pila*, entonces este autómata

1. cambia de estado,
2. elimina el símbolo de la cima de la pila y apila ninguno, uno o varios símbolos en la misma, y
3. mueve el cabezal de lectura sobre la cinta de entrada una celda a la derecha, siempre y cuando se hubiese leído un símbolo de la misma.

Es decir, dada la transición $f(q, a, X) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$ el autómata de pila, en el supuesto que se seleccione para ejecución la acción $f(q, a, X) = (p_i, \gamma_i)$, con $\gamma_i = RYZ$, realiza los siguientes cambios:

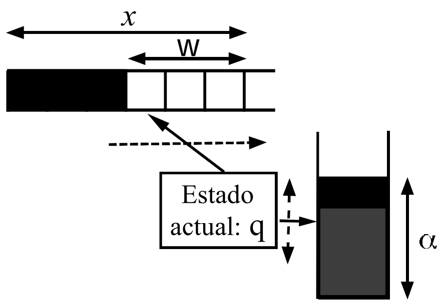


Como se observa en la figura, se transita desde el estado q al estado p_i (que pasa a ser el estado actual) el cabezal de lectura se desplaza una celda a la derecha y en la pila desaparece el símbolo *X* de la cima y en su lugar se introducen los símbolos *Z*, *Y* y *R*, en este orden.

[1]Más adelante, se remarcará esta cuestión, pero nótese que esta posibilidad de no leer el símbolo bajo el cabezal hace que el comportamiento de unl autómata de pila sea no determinista por propia definición.

El comportamiento es similar en el caso de ejecutar una transición del tipo $f(q, \lambda, X) = \{..., (p_i, \gamma_i), ...\}$, con la salvedad de que, en este caso, el cabezal de lectura de la cinta *no* se hubiera desplazado hacia la derecha y permanecería sobre el símbolo *a*.

Para poder describir el comportamiento del AP sin necesidad de tener que especificar de forma gráfica su evolución, se suelen utilizar las *descripciones instantáneas*; en el caso de un AP, una descripción instantánea es un elemento del conjunto $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$. Así, por ejemplo, la descripción instantánea (q, w, α) $(\in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$ representa la siguiente situación:



La cadena de entrada es *x*, de la cual falta todavía por analizar el sufijo *w*. El cabezal de lectura está sobre el primer símbolo de *w*, el estado actual del autómata es *q* y el contenido de la pila es α.

Se dice que una descripción instantánea I_1 *alcanza* a otra descripción instantánea I_2 *en un sólo paso*, y se denota como $I_1 \vdash I_2$, cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{l} I_1 = (q, aw, X\gamma) \wedge \\ I_2 = (p, w, \delta\gamma) \wedge \\ (p, \delta) \in f(q, a, X) \mid \; a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}) \wedge X \in \Gamma \end{array}$$

Se dice que una descripción instantánea I_1 *alcanza* a otra descripción instantánea I_2, y se denota como $I_1 \overset{*}{\vdash} I_2$, si $\exists$ *n* descripciones instantáneas auxiliares $DI_1, DI_2, \ldots, DI_n$ tal que a través de ellas se pueda alcanzar I_2 desde I_1, es decir,

$$I_1 = DI_1 \vdash DI_2 \vdash \ldots \vdash DI_n = I_2.$$

Con estas definiciones ya se está en condiciones de poder establecer cuál es el lenguaje aceptado por un AP, en el que hay que diferenciar dos casos.

Definición 5.2 *Se define el* **lenguaje aceptado por estado final** *de un AP A al conjunto*

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, x, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \gamma) \; tal \; que \; p \in F\}.$$

Se define el **lenguaje aceptado por pila vacía** *de un AP A al conjunto*

$$N(A) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, x, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)\}.$$

Se observa que en la definición de N(A), no importa el estado al que se llegue al analizar la cadena *x*. Es suficiente con que, al finalizar su análisis, la pila quede vacía.

Ejemplo:

Sea A el siguiente AP:

$$A = \langle\{a, b\}, \{q_0\}, \{S, A, B\}, f, q_0, S, \emptyset\rangle$$

donde la función de transición f se define de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f(q_0, a, S) &= \{(q_0, SB), (q_0, ASB)\} \\ f(q_0, \lambda, S) &= \{(q_0, \lambda)\} \\ f(q_0, b, B) &= \{(q_0, \lambda)\} \\ f(q_0, a, A) &= \{(q_0, \lambda)\} \end{aligned}$$

Como se observa, en este AP el conjunto de estados finales es $\emptyset$. Por lo tanto, este AP reconoce el lenguaje $\emptyset$ por el criterio de estado final.

El lenguaje reconocido por este autómata por el criterio de pila vacía es $N(A) = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$.

Para comprobar que este AP reconoce la cadena aaabb *se van a especificar todas las posibles transiciones que se pueden realizar con este autómata; el resultado se muestra en la figura 5.1. Como al menos una secuencia de transiciones consigue vaciar la pila y consumir toda la cadena de entrada, entonces la cadena* aaabb *será aceptada.*

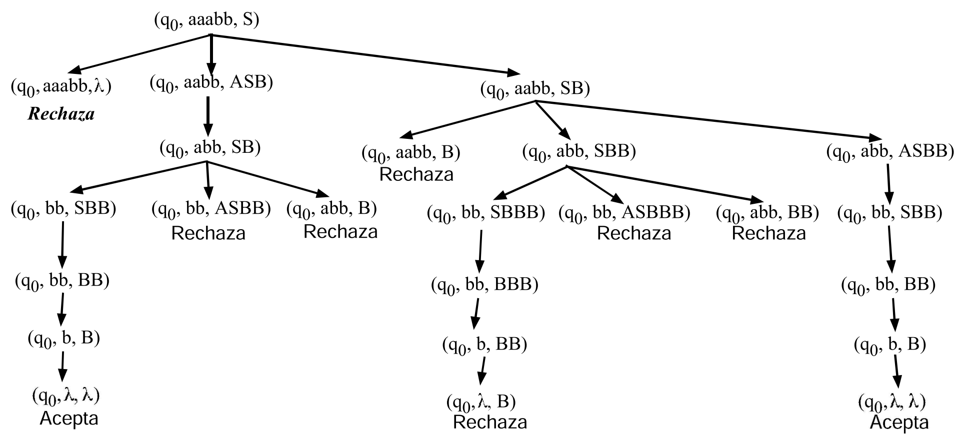


Figura 5.1: Análisis de todas las posibles transiciones que puede realizar el autómata A sobre la cadena *aaabb*.

La definición de un autómata de pila implica un *comportamiento no determinista*, que se pone de manifiesto en el ejemplo anterior.

De forma general, un autómata de pila determinista es un AP en el que es aplicable una, y sólo una, transición en cada instante. Sin embargo, esta posibilidad no basta para excluir el comportamiento no determinista, ya que puede darse la situación de que, desde un mismo estado y con un mismo símbolo en la cima de la pila, se puedan realizar acciones diferentes si existen transiciones con lectura de símbolo o sin lectura de símbolo, es decir, $f(q, a, A) \neq \emptyset \wedge f(q, \lambda, A) \neq \emptyset$. Esto representa una situación no determinista tal y como se pone de relieve en la figura 5.1 en, por ejemplo, las *tres* posibles transiciones que pueden ejecutarse desde la situación inicial $(q_0, aaabb, S)$.

Por lo tanto, *para que un AP sea determinista* se han de cumplir las siguientes condiciones:

1. $\forall\, q \in Q,\ \forall\, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \forall\, A \in \Gamma,\ \textit{se cumple que}\ \mid f(q, a, A) \mid \leq 1,$
2. $\forall\, q \in Q,\ \forall\, A \in \Gamma,\ \textit{si}\ f(q, \lambda, A) \neq \emptyset\ \textit{entonces}\ \forall\, a \in \Sigma,\ f(q, a, A) = \emptyset.$

Ejemplo:

Construir un AP determinista que reconozca el lenguaje $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.

$$\begin{array}{l} f(q_0, \lambda, Z) = \{(q_0, X)\} \\ f(q_0, 0, X) = \{(q_1, AX)\} \\ f(q_1, 0, A) = \{(q_1, AA)\} \\ f(q_1, 1, A) = \{(q_2, \lambda)\} \\ f(q_2, 1, A) = \{(q_2, \lambda)\} \\ f(q_2, \lambda, X) = \{(q_0, \lambda)\} \end{array}$$

El AP construido reconoce el lenguaje L por estado final. Efectivamente, por cada símbolo '0' leído de la cinta de entrada, se introduce en la pila otro símbolo A. En la situación en que se lea el primer '1' se pasa al estado q_2*, cuyo fin es eliminar un símbolo A de la pila por cada '1' leído.*

Si al acabar de leer la cadena de entrada el AP está en el estado q_0 *(que es el único estado final) es porque había el mismo número de '0' que de '1'. Cualquier otra transición que no esté especificada en la anterior función de transición produce que, si esa situación se presenta, entonces el AP se para y rechaza la cadena.*

La definición de Autómatas de Pila determinista y no deterministas, permite plantear si el requisito del determinismo reduce el poder reconocedor de un AP.

Teorema 5.1 *Existen LCLs que no son aceptados por ningún AP determinista.*

Demostración

Sea $L = \{a^n b^n : n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} : n > 0\}$. Este lenguaje es un LCL pues es generado por la siguiente GCL:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aAb \mid aBbb \\ A \rightarrow aAb \mid \lambda \\ B \rightarrow aBbb \mid \lambda \end{array}$$

Para demostrar que L no puede ser reconocido por ningún AP determinista es preciso saber que el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ no es un LCL[2].

La demostración se hará por reducción al absurdo: es decir, si se supone que existe un AP determinista que reconoce L, entonces se llega a un resultado imposible.

Sea *A* un AP determinista tal que *L(A) = L*. Se realiza la siguiente construcción:

1. Sean A_1 y A_2 copias del AP *A*. Se dice que dos estados, uno de A_1 y otro de A_2, son *primos entre sí*, si ambos estados son copias del mismo estado del AP original *A*.
2. Eliminar la característica de aceptación de los estados de aceptación de A_1 y la característica de estado inicial del estado inicial de A_2.
3. Modificar el estado destino *p* de cada una de las transiciones que se originan en un antiguo estado de aceptación de A_1, para que el estado destino sea el primo de *p* en A_2.
4. Modificar todas aquellas transiciones que lean una *b* de la entrada y cuyos estados destino se encuentren en A_2 para que lean una *c* en su lugar.

Con esta construcción el conjunto de cadenas aceptado por este AP A' será el formado por aquellas cadenas que comenzando en el estado inicial de A_1 reconocen *n* símbolos *a* y, posteriormente, reconocen *n* símbolos *b*. En este instante, el estado en el que se encuentra el AP es un antiguo estado final de A_1. Sus transiciones se han modificado para que reconozca *n* símbolos *c* (pasando al antiguo AP A_2) en vez de *n* símbolos *b*, y se llega de esta forma, a uno de los estados finales de A_2, que son los únicos estados finales de A'. Por lo tanto, se ha reconocido una cadena de la forma $a^n b^n c^n, n > 0$.

Es decir, se ha podido construir un AP que permite reconocer un lenguaje que no es un LCL. Como la construcción realizada ha sido correcta, el único fallo en la demostración ha sido la suposición de que pueda existir ese AP determinista que reconozca L.

Como consecuencia, el lenguaje L no puede ser reconocido por ningún AP determinista.

c.q.d.

La consecuencia directa de este teorema es que, si se denomina L(APND) al conjunto de lenguajes aceptados por AP no deterministas, mediante el criterio de alcanzabilidad del estado final, y L(APD) al conjunto de lenguajes aceptados por AP deterministas, mediante el criterio de alcanzabilidad del estado final, entonces

$$L(APD) \subset L(APND).$$

[2]Se demostrará en el capítulo 6.

Otra cuestión relacionada con el estudio de los lenguajes aceptados por los AP, consiste en determinar si, dado que a cada AP se le pueden asociar dos lenguajes (el aceptado por *estado final* y el aceptado por *pila vacía*), existe alguna diferencia respecto al conjunto de lenguajes que pueden reconocerse por ambos criterios.

Es decir, si se denomina *N(APND)* al conjunto de lenguajes aceptados por APND mediante el criterio de pila vacía y *L(APND)* al conjunto de lenguajes aceptados por APND mediante el criterio de estado final, ¿cuál es la relación existente entre L(APND) y N(APND)?.

Teorema 5.2 *Si L = L(A) para algún AP A, entonces existe un AP A' tal que $N(A') = L$.*

<u>Demostración:</u>

Sea $A = \langle \Sigma, Q, \Gamma, f, q_0, Z_0, F \rangle$ un AP tal que $L(A) = L$.

Para construir un AP que reconozca L por pila vacía, el método consiste en introducir un nuevo estado, q_e, al que se accede desde cualquiera de los estados de F y cuya única finalidad consiste en vaciar la pila.

Además, se debe evitar la situación en la que en el AP A se vacie la pila, sin que el estado del autómata sea final, ya que esto podría provocar que una cadena no aceptada por A, sí que fuera reconocida por por A'. Para evitar esta situación, se precisa disponer de un nuevo símbolo fondo de pila que sólo se elimine cuando se esté en el nuevo estado q_e; es decir, cuando se haya pasado obligatoriamente por un estado final, habiendo consumido además toda la cadena de entrada.

Sea el AP $A' = \langle \Sigma, Q', \Gamma', f', q'_0, X_0, \emptyset \rangle$ tal que

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q_e\}$ *tal que* $q'_0, q_e \notin Q$,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$ *tal que* $X_0 \notin \Gamma$,

y en el que las reglas que definen a la función de transición f' son las siguientes:

1. $f'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$,
2. $f(q, a, B) \subseteq f'(q, a, B)$, $\forall\, q \in Q$, $\forall\, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $\forall\, B \in \Gamma$,
3. $(q_e, \lambda) \in f'(q, \lambda, B)$, $\forall\, q \in F$, $\forall\, B \in \Gamma'$,
4. $\{(q_e, \lambda)\} = f'(q_e, \lambda, B)$, $\forall\, B \in \Gamma'$.

Hay que demostrar que $L(A) = N(A') = L$. Para ello, se demostrará que $L(A) \subseteq N(A')$ y que $N(A') \subseteq L(A)$.

$L(A) \subseteq N(A')$ **:** Sea $x \in L(A)$; entonces $(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \alpha), p \in F \wedge \alpha \in \Gamma^*$. Por lo tanto, en el AP A' se puede obtener la siguiente secuencia de descripciones instantáneas:

$$(q_0', x, X_0) \vdash (q_0, x, Z_0X_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \alpha X_0) \overset{*}{\vdash} (q_e, \lambda, \lambda),$$

y, entonces, $x \in N(A')$.

$N(A') \subseteq L(A)$ **:** Sea $x \in N(A')$; entonces desde la descrición instantánea inicial, (q_0', x, X_0), sólo se puede realizar una única transición a la descrición instantánea (q_0, x, Z_0X_0) y, a partir de esta, todas las transiciones realizadas son también transiciones de A.

Para poder aceptar la cadena *x* el AP A' debe tener la pila vacía y eso sólo se consigue pasando previamente por un estado final de A_2; por lo tanto, de la descrición instantánea (q_0, x, Z_0X_0) se ha de llegar a la descrición instantánea $(p, \lambda, \alpha X_0)$, siendo *p* un estado final de A, para, posteriormente, vaciar la pila mediante las transiciones de tipo 4.

En el AP A se pueden realizar las mismas transiciones desde (q_0, x, Z_0) hasta (p, λ, α) aceptando, por lo tanto, la cadena *x*.

c.q.d.

Queda demostrado entonces que $L(APND) \subseteq N(APND)$. A continuación se verá que la inclusión también se cumple a la inversa.

Teorema 5.3 *Si $L = N(A)$ para algún AP A, entonces existe un AP A' tal que $L(A') = L$.*

<u>Demostración</u>

Sea $A = \langle \Sigma, Q, \Gamma, f, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$ un AP tal que $N(A) = L$.

Para construir un AP que reconozca L por estado final, el método consiste en introducir un nuevo estado final, q_f', al que se accede cuando en el AP A la pila está vacía.

Para poder determinar cuando se vaciaría la pila, sin que esa situación llegue a producirse, se precisa de un nuevo símbolo fondo de pila que actúe como señal.

Sea el AP $A' = \langle \Sigma, Q', \Gamma', f', q_0', X_0, F' \rangle$ tal que

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f'\},\ tal\ que\ q_0', q_f' \notin Q,$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\},\ tal\ que\ X_0 \notin \Gamma,$
- $F' = \{q_f'\},$

y en el que las reglas que definen a la función de transición f' son las siguientes:

1. $f'(q_0', \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$,
2. $f'(q, a, B) = f(q, a, B),\ \forall\, q \in Q,\ \forall\, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \forall\, B \in \Gamma$,
3. $f'(q, \lambda, X_0) = \{(q_f', \lambda)\},\ \forall\, q \in Q$.

Falta demostrar que $L(A') = N(A) = L$, y para ello se seguirá el método habitual, demostrando que $L(A') \subseteq N(A)$ y que $N(A) \subseteq L(A')$.

$N(A) \subseteq L(A')$ **:** Sea $x \in N(A)$; entonces, $(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$. Por lo tanto, en el AP A' se puede obtener la siguiente secuencia de descripciones instantáneas:

$$(q_0', x, X_0) \vdash (q_0, x, Z_0X_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, X_0) \vdash (q_f', \lambda, \lambda),$$

y, por lo tanto, $x \in L(A')$.

$L(A') \subseteq N(A)$ **:** Sea $x \in L(A')$; entonces, desde la descripción instantánea inicial (q_0', x, X_0) sólo se puede realizar una única transición a la descripción instantánea (q_0, x, Z_0X_0) y, a partir de esta, todas las transiciones realizadas son también de A.

Para poder aceptar la cadena *x*, el AP A' debe alcanzar un estado final y eso sólo se consigue pasando previamente por una pila cuyo único símbolo sea X_0. Por lo tanto, de la descripción instantánea (q_0, x, Z_0X_0) se ha de llegar a la descripción instantánea (p, λ, X_0), para, posteriormente, pasar al estado final mediante la transición número 3; es decir, se alcanza la descripción instantánea (q_f', λ, λ).

En el AP A se pueden realizar las mismas transiciones desde (q_0, x, Z_0) hasta (p, λ, λ) aceptando, por lo tanto, la cadena *x*.

c.q.d.

Como consecuencia de ambos teoremas se obtiene que *L(APND) = N(APND)*.

5.2. Relación entre los Autómatas de Pila y los LCL.

En esta sección se establecerán formalmente las relaciones que existen entre los lenguajes de contexto libre y los autómatas de pila no deterministas.

Teorema 5.4 *Si L es un LCL, entonces existe un APND A | L = N(A).*

Demostración

Sea L un LCL, tal que $\lambda \notin L$, entonces existe una GCL $G = \langle \Sigma_A, \Sigma_T, P, S \rangle$ en Forma Normal de Greibach, tal que L(G) = L.

Se construye el siguiente AP, $A = \langle \Sigma, Q, \Gamma, q_0, Z_0, f, \emptyset \rangle$ donde,

$$\begin{array}{l} \Sigma = \Sigma_T \\ Q = \{q_0\} \\ \Gamma = \Sigma_A \\ Z_0 = S \\ (q_0, \gamma) \in f(q_0, a, B) \Leftrightarrow (B \to a\gamma) \in P \end{array}$$

Resta por demostrar que *N(A) = L*. Para ello, se demostrará que si se emplean siempre derivaciones a izquierda en la GCL G, entonces

$$(S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha) \Leftrightarrow ((q_0, w, S) \stackrel{*}{\vdash} (q_0, \lambda, \alpha)),$$

donde $w \in \Sigma_T^* \wedge \alpha \in \Sigma_A^*$.

$((q, w, S) \stackrel{*}{\vdash} (q, \lambda, \alpha)) \Rightarrow (S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha)$ **:** Por inducción sobre el número de descripciones instantáneas utilizadas:

Paso Base: Con i = 0, $(q, \lambda, S) \stackrel{0}{\vdash} (q, \lambda, S)$, entonces $S \stackrel{*}{\Rightarrow} S$.

Hipótesis de Inducción: $(q, w, S) \stackrel{n}{\vdash} (q, \lambda, \alpha) \Rightarrow S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha$.

Paso de Inducción: Sea $(q, wa, S) \stackrel{n+1}{\vdash} (q, \lambda, \alpha)$ una derivación de *n+1* pasos; entonces, $(q, wa, S) \stackrel{n}{\vdash} (q, a, \beta) = (q, a, B\theta) \vdash (q, \lambda, \alpha)$.

Las primeras *n* derivaciones implican, por H.I., que $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\beta$, y la última derivación sólo se puede realizar si $(q, \gamma) \in f(q, a, B)$.

Por lo tanto, $\exists\ (B \to a\gamma) \in P$ y, además, $\beta = B\theta$, por lo que se obtiene que,

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} wB\theta \Rightarrow wa\gamma\theta = wa\alpha.$$

$(S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha) \Rightarrow ((q, w, S) \stackrel{*}{\vdash} (q, \lambda, \alpha))$ **:** Por inducción sobre el número de pasos de derivación y sabiendo que en la gramática se emplean siempre derivaciones a izquierda:

Paso Base: Con i = 0, $S \stackrel{0}{\Rightarrow} S$, entonces $(q, \lambda, S) \stackrel{*}{\vdash} (q, \lambda, S)$.

Hipótesis de Inducción: $S \stackrel{n}{\Rightarrow} w\alpha \Rightarrow (q, w, S) \stackrel{*}{\vdash} (q, \lambda, \alpha)$.

Paso de Inducción: Sea $S \stackrel{n+1}{\Rightarrow} wa\alpha$ una derivación de *n+1* pasos. Esta derivación se ha obtenido por medio de la siguiente secuencia, $S \stackrel{n}{\Rightarrow} wB\beta \Rightarrow wa\gamma\beta = wa\alpha$.

Las primeras *n* derivaciones implican, por H.I., que $(q, wa, S) \stackrel{n}{\vdash} (q, a, B\beta)$, y la última derivación sólo se puede realizar si $\exists\ (B \to a\gamma) \in P$, y, por lo tanto, $(q, \gamma) \in f(q, a, B)$.

Entonces,

$$(q, wa, S) \stackrel{n}{\vdash} (q, a, B\beta) \vdash (q, \lambda, \gamma\beta) = (q, \lambda, \alpha).$$

c.q.d.

Por último, queda por establecer el teorema recíproco, cuya demostración se puede encontrar en el libro "*Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*" de Hopcroft y Ullman.

Teorema 5.5 *Si $L = N(A)$ para algún AP A, entonces L es un LCL.*