Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II

Presentaciones en el Aula

TEMA 10

Integrales de Superficie

Introducción

Breve estudio de las integrales de superficie y de sus aplicaciones.

Una superficie es el lugar de un punto que se mueve en el espacio con dos grados de libertad. Se dispone de varias formas para expresar analíticamente ese lugar.

En muchos aspectos, las integrales de superficie son análogas a las integrales de línea.

En las integrales de línea se integra a lo largo de una curva representada paramétrica por un vector dependiente de una variable (un grado de libertad).

En las integrales de superficie se integra sobre una superficie, que se representa paramétricamente a través de un vector de dos variables.

En ciertas condiciones generales el valor de la integral es independiente de la representación.

Entre las aplicaciones elementales de las integrales de superficie se pueden mencionar el cálculo de áreas de superficies en el espacio tridimensional o del flujo de fluido a través de una superficie.

Representaciones implícita y explícita de una superficie

Representación implícita:

Se considera una superficie como un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, x) = 0$

Representación explícita:

Se considera una superficie como un conjunto de puntos que asume una de las coordenadas de un sistema cartesiano $3-$dimensional, en función de las otras dos. Este tipo de representación viene dada por una o varias ecuaciones del tipo $z = f(x, y)$.

Representación paramétrica y vectorial de una superficie

Representación paramétrica

Se define a la superficie por medio de tres ecuaciones que expresan x, y, z en función de dos parámetros u, v :

$$\left.\begin{aligned} x &= X(u,v) \\ y &= Y(u,v) \\ z &= Z(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

El punto (u,v) varía en un conjunto conectado $2-$dimensional T en el plano uv, y los puntos (x,y,z) correspondientes constituyen una porción de superficie en el espacio xyz.

Representación vectorial paramétrica

Si se introduce el concepto de *radio vector* $\mathbf{r}$ que une el origen a un punto genérico (x,y,z) de la superficie, se pueden combinar las tres ecuaciones paramétricas [1] en una ecuación vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k} \quad , \quad (u,v) \in T$$

que se denomina *ecuación vectorial* de la superficie.

Ejemplo: esfera de radio a con centro en el origen

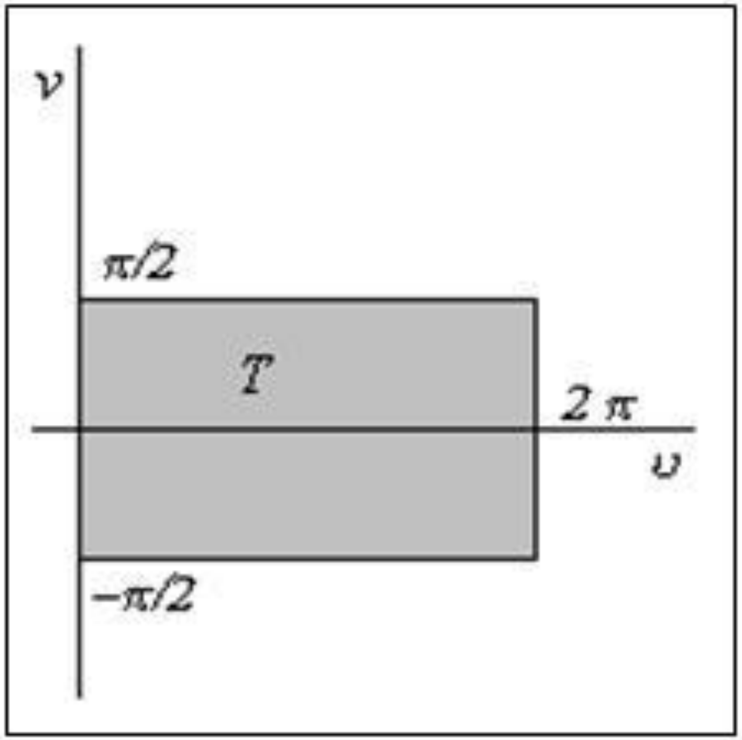
Representación implícita: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+a^2=0$

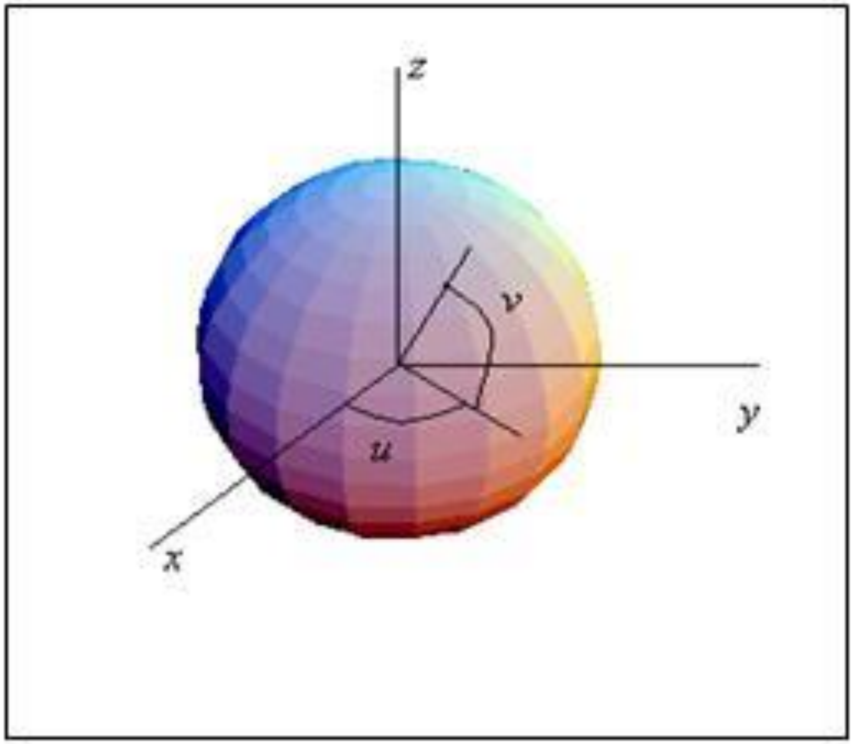
Representación explícita: $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \end{cases}$

Representación paramétrica $\begin{cases} x=a\cos u\cos v \\ y=a\,sen u\cos v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in\left[-\pi/2,\pi/2\right] \\ z=a\,sen v \end{cases}$

Representación vectorial: $\mathbf{r}(u,v)=a\cos u\cos v\,\mathbf{i}+a\,\mathrm{sen}\,u\cos v\,\mathbf{j}+a\,\mathrm{sen}\,v\,\mathbf{k}$

Ejemplo: esfera de radio a con centro en el origen





Si la función $\mathbf{r}$ es uno a uno en T, la imagen $\mathbf{r}(T)$ denomina *superficie paramétrica simple*. En tal caso, puntos distintos de T se aplican en puntos distintos de la superficie.

Producto vectorial fundamental (vector)

$$\mathbf{r}(u,v)=X(u,v)\mathbf{i}+Y(u,v)\mathbf{j}+Z(u,v)\mathbf{k} \quad , \quad (u,v)\in T$$

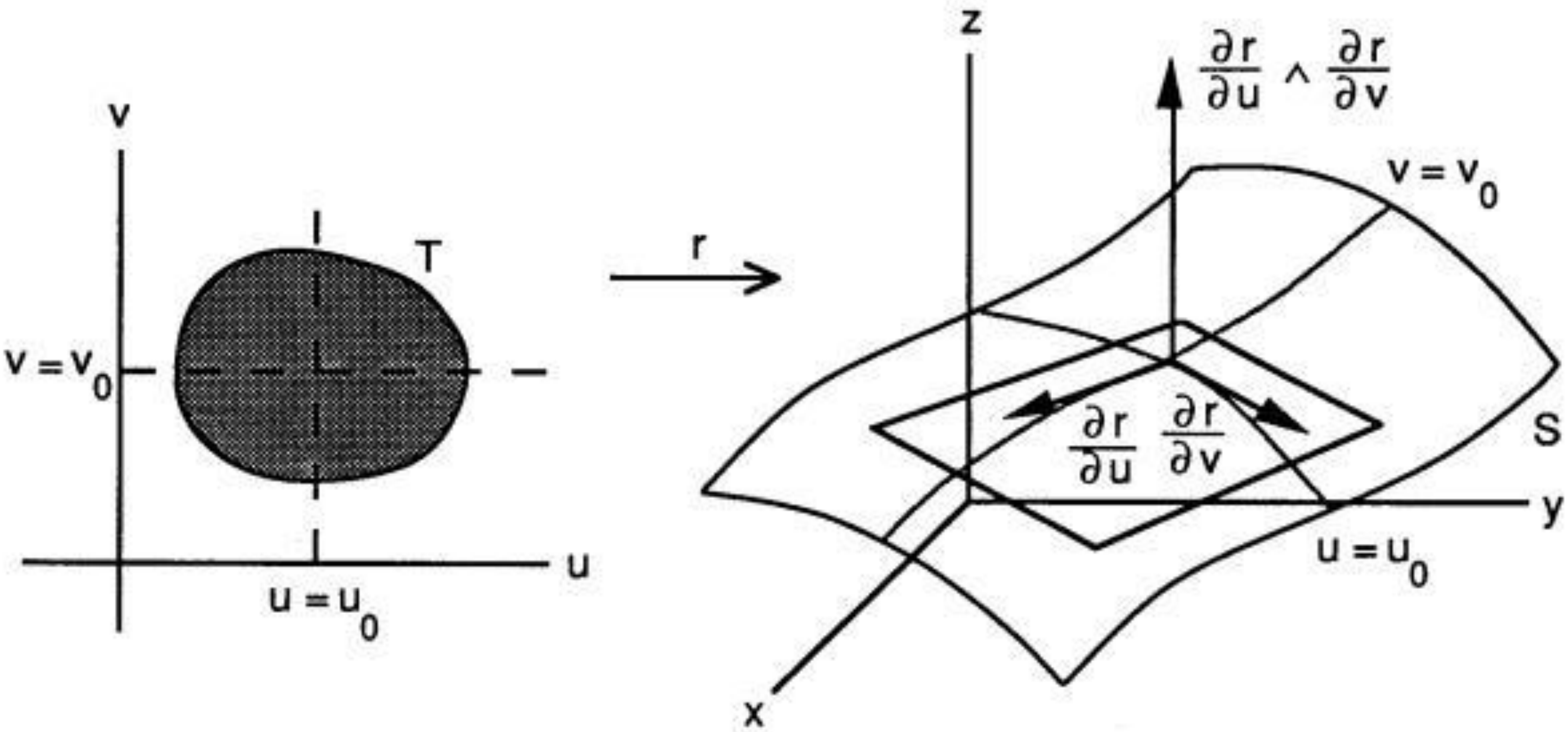
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\dfrac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i}+\dfrac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j}+\dfrac{\partial Z}{\partial u}\mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\dfrac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i}+\dfrac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j}+\dfrac{\partial Z}{\partial v}\mathbf{k} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \textit{producto vectorial fundamental}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$=\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i}+\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\mathbf{j}+\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

Producto vectorial fundamental (vector)



Área de una superficie en el espacio $\mathbf{R}^3$

Representación vectorial

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

$$a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial (Y,Z)}{\partial (u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial (Z,X)}{\partial (u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} \right)^2}\; du\, dv$$

Representación explícita

$$a(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}\; dx\, dy$$

Integral de Superficie de un campo escalar

Sea $S = \mathbf{r}(t)$ una superficie paramétrica descrita por una función diferenciable $\mathbf{r}$ definida en una región T del plano uv, y sea f un campo escalar definido y acotado en S.

La integral de superficie de f sobre S se representa con los símbolos

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} f \, dS$$

$$\iint_{S} f(x,y,z) \, dS$$

y está definida por la ecuación

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} f \, dS = \iint_{T} f[\mathbf{r}(u,v)] \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du \, dv$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

Producto vectorial fundamental (vector)

Sea $S = \mathbf{r}(t)$ una superficie paramétrica descrita por una función diferenciable $\mathbf{r}$ definida en una región T del plano uv, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido y acotado en S.

La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S se representa con los símbolos

$\iint\limits_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint\limits_{S} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ y está definida por

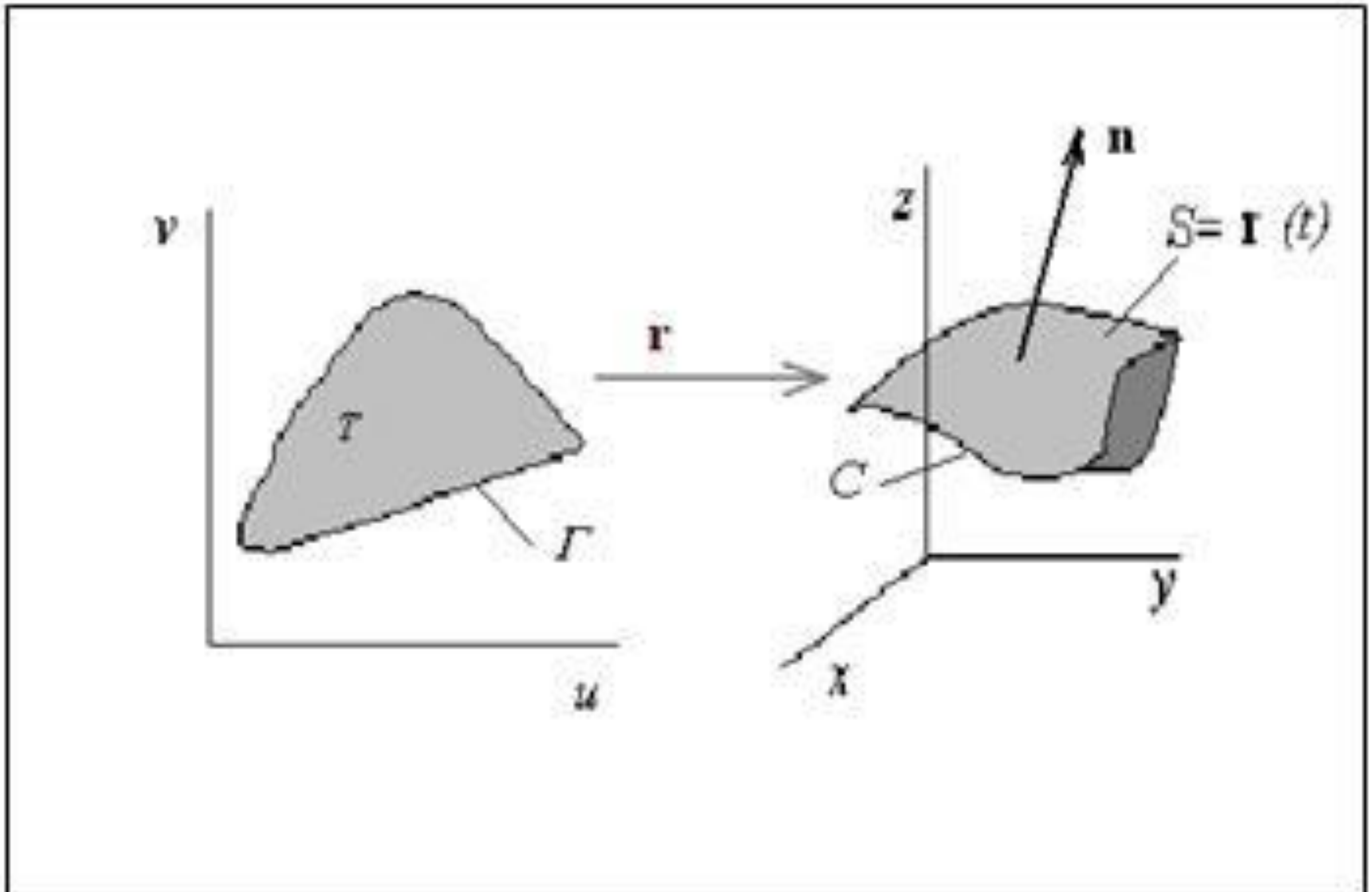
$$\iint\limits_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint\limits_{T} \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

$\hat{\mathbf{n}}$ es el *vector unitario normal* a S que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector producto vectorial fundamental.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

Teorema de Stokes



Teorema de Stokes

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_T P[\mathbf{r}(u,v)]\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}du\,dv + \iint_T Q[\mathbf{r}(u,v)]\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}du\,dv + \iint_T R[\mathbf{r}(u,v)]\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}du\,dv$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Teorema de la divergencia

Si V es un sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por una superficie S, si $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a S y si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en V, entonces

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o, lo que es lo mismo,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_S \left(P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma \right) dS$$

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 10

Integrales de Superficie