Tema 10. Integrales de superficie

1. Introducción

Este capítulo es una breve introducción al estudio de las integrales de superficie y de sus aplicaciones. Puede pensarse la integral de superficie como el equivalente en dos dimensiones a una integral de línea siendo la región de integración una superficie en lugar de una curva.

Como consideración previa deben establecerse acuerdos sobre qué es una superficie. Hablando sin precisión, una superficie es el lugar de un punto que se mueve en el espacio con dos grados de libertad. Se dispone de varias formas para expresar analíticamente ese lugar.

En muchos aspectos, las integrales de superficie son análogas a las integrales de línea. Se definieron las integrales de línea mediante una representación paramétrica de la curva o camino de integración.

Análogamente, se definirán las integrales de superficie con relación a una representación paramétrica de la superficie, que será el ámbito donde el campo escalar o vectorial se integra.

En ciertas condiciones generales el valor de la integral es independiente de la representación. Entre las aplicaciones elementales de las integrales de superficie se pueden mencionar el cálculo de áreas de superficies en el espacio tridimensional, la determinación del centro de gravedad de un cuerpo o del flujo de fluido a través de una superficie.

2. Representación paramétrica de una superficie

2.1. Representación implícita:

Se considera una superficie como un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, x) = 0$

2.2. Representación explícita:

Se considera una superficie como un conjunto de puntos que asume una de las coordenadas de un sistema cartesiano $3-$dimensional, en función de las otras dos. Este tipo de representación viene dada por una o varias ecuaciones del tipo $z = f(x, y)$.

2.3. Representación paramétrica (o vectorial paramétrica):

Se define a la superficie por medio de tres ecuaciones que expresan x, y, z en función de dos parámetros u, v :

$$\left.\begin{aligned} x &= X(u,v) \\ y &= Y(u,v) \\ z &= Z(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

El punto (u,v) varía en un conjunto conectado $2-$dimensional T en el plano uv, y los puntos (x, y, z) correspondientes constituyen una porción de superficie en el espacio xyz.

Si se introduce el concepto de *radio vector* $\mathbf{r}$ que une el origen a un punto genérico (x, y, z) de la superficie, se pueden combinar las tres ecuaciones paramétricas [1] en una ecuación vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k} \quad , \quad (u,v) \in T \qquad [2]$$

que se denomina *ecuación vectorial* de la superficie.

Ejemplo 1:

Representar implícita, explícita y paramétricamente una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio a.

Resolución:

Representación implícita:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0 \qquad [3]$$

Representación explícita:

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \qquad [4]$$

Representación paramétrica:

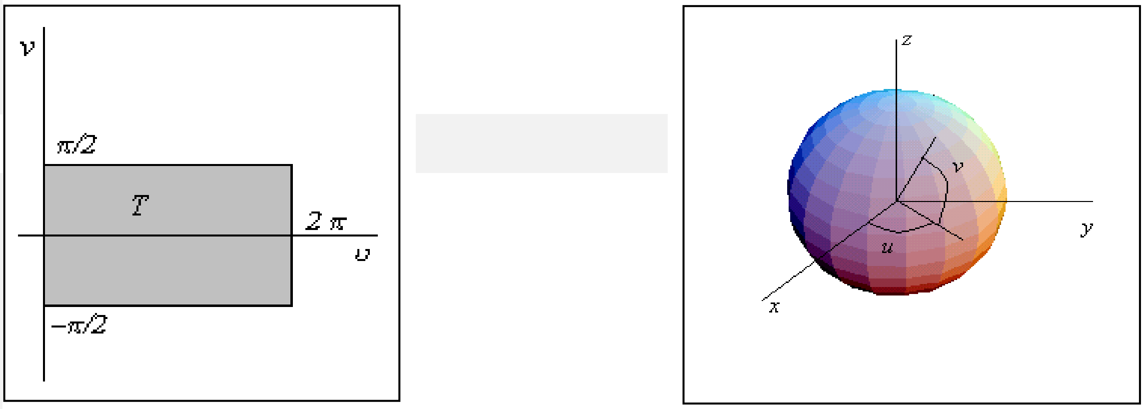
$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = a \operatorname{sen} u \cos v \\ z = a \operatorname{sen} v \end{cases} \quad , \quad u \in [0\,,2\pi] \quad , \quad v \in \left[-\pi/2\,,\pi/2\right] \qquad [5]$$

Representación vectorial:

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos u \cos v\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\,\mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\,\mathbf{k} \qquad [6]$$

En la Figura 1 se muestra la última representación.

Figura 1



Si la función $\mathbf{r}$ es uno a uno en T, la imagen $\mathbf{r}(T)$ denomina *superficie paramétrica simple*. En tal caso, puntos distintos de T se aplican en puntos distintos de la superficie.

2.4. Producto vectorial fundamental

Sea la superficie representada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k} \quad , \quad (u,v) \in T \qquad [7]$$

si X, Y, Z son derivables en T se pueden considerar los dos vectores

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial Z}{\partial u}\mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \dfrac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial Z}{\partial v}\mathbf{k} \end{cases} \qquad [8]$$

y el producto vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \qquad [9]$$

se denomina *producto vectorial fundamental* de la representación $\mathbf{r}$. Sus componentes pueden expresarse como determinantes Jacobianos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \qquad [10]$$

$$= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

Si (u,v) es un punto de T en el cual $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ son continuas y el producto vectorial fundamental no es nulo, el punto imagen $\mathbf{r}(u,v)$ se llama *punto regular* de $\mathbf{r}$. Los puntos en que no son continuas $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$, o bien $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial v = 0$ se llaman *puntos singulares* de $\mathbf{r}$.

Una superficie $\mathbf{r}(T)$ se llama regular si todos sus puntos son regulares. Un punto de una superficie puede ser regular para una representación paramétrica y singular para otra.

El plano determinado por los vectores $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ es tangente a la superficie, mientras que el producto vectorial de ambos resulta normal a la superficie.

3. Área de una superficie

Sea $S = \mathbf{r}(t)$ una superficie paramétrica representada por la función $\mathbf{r}$ definida en una región T del plano uv. El área de S, $a(S)$, queda definida por la integral doble

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad [11]$$

Es decir que para determinar el área de la superficie S se calcula primero el producto vectorial fundamental $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial v$ y entonces se integra su longitud en la región T.

Si $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial v$ está expresado en función de sus componentes como en la ecuación [10], resulta

$$a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\; du\, dv \qquad [12]$$

Si S viene dada explícitamente por una ecuación de la forma $z = f(x,y)$ se puede utilizar a x y a y como parámetros. En este caso el producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad [13]$$

resultando

$$a(S)=\iint_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dx\,dy \qquad [14]$$

donde la región T es la proyección de S en el plano xy.

Ejemplo 2:

Se considera un hemisferio S de radio a y centro en el origen. Calcular su área.

Resolución:

La representación paramétrica de la superficie es

$$\begin{cases} x=a\cos u\cos v \\ y=a\,\text{sen}\,u\cos v \\ z=a\,\text{sen}\,v \end{cases} \quad , \quad u\in[0\,,2\pi] \quad , \quad v\in\left[0\,,\pi/2\right] \qquad [15]$$

con lo que resulta

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=-a\,\text{sen}\,u\cos v\ \mathbf{i}+a\cos u\cos v\ \mathbf{j} \qquad [16]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=-a\cos u\,\text{sen}\,v\ \mathbf{i}-a\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\ \mathbf{j}+a\cos v\ \mathbf{k} \qquad [17]$$

y el producto vectorial es

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=a\cos v\cdot\mathbf{r}(u,v) \qquad [18]$$

por lo tanto

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|=\left\|a\cos v\cdot\mathbf{r}(u,v)\right\|=a^2\cdot|\cos v| \qquad [19]$$

y aplicando la fórmula [12]

$$a(S)=a^2\iint_T|\cos v|\ du\,dv=a^2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos v\ dv\right]du=2\pi\,a^2 \qquad [20]$$

4. Definición de integral de superficie

4.1. Campos escalares

Sea $S=\mathbf{r}(t)$ una superficie paramétrica descrita por una función diferenciable $\mathbf{r}$ definida en una región T del plano uv, y sea f un campo escalar definido y acotado en S.

La integral de superficie de f sobre S se representa con los símbolos

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} f\ dS \qquad\qquad [21]$$

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS$$

y está definida por la ecuación

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} f \ dS = \iint_T f\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad [22]$$

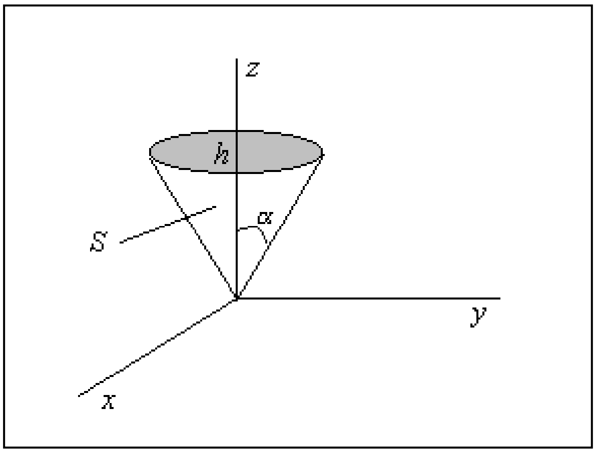
siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

Ejemplo 3: Masa de una carcasa cónica

Se considera una chapa delgada con la forma de un cono circular recto S de altura h como se ve en la figura 2.

Suponiendo que se conoce la distribución de la densidad de la masa σ (masa por unidad de área), calcular la masa total.

Figura 2



Resolución:

Se calcula la masa solicitada mediante la resolución de la siguiente integral de superficie:

$$M = \iint_{\mathbf{r}(t)} \sigma \ dS \qquad [23]$$

En primer lugar, se deberá representar la superficie S, de alguna de las maneras vistas, por ejemplo, paramétricamente de la siguiente forma

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \quad , \quad 0 \le u \le h \cdot \cot\alpha \quad , \quad 0 \le v \le 2\pi \\ z = u \cot\alpha \end{cases} \qquad [24]$$

con lo cual la superficie queda representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\ \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\ \mathbf{j} + u\cot\alpha\ \mathbf{k} \qquad [25]$$

Planteando la integral

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} \sigma \ dS = \iint_T \sigma\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad [26]$$

se debe calcular la norma del producto vectorial fundamental, para lo cual previamente se debe computar el producto vectorial fundamental, que es, aplicando [10]

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\operatorname{sen} v & \cot\alpha\\ u\cos v & 0\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}\cot\alpha & \cos v\\ 0 & -u\operatorname{sen} v\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}\cos v & \operatorname{sen} v\\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v\end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$=-u\cos v\cdot\cot\alpha\ \mathbf{i}-\cot\alpha\cdot u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j}+\left(u\cos^2 v+u\operatorname{sen}^2 v\right)\mathbf{k}= \qquad [27]$$

$$=u\cdot\left(-\cos v\cdot\cot\alpha\ \mathbf{i}-\cot\alpha\cdot\operatorname{sen} v\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$$

resultando

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|=u\cdot\sqrt{\left(\cos^2 v\cdot\cot^2\alpha+\cot^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2 v+1\right)}= \qquad [28]$$

$$=u\cdot\sqrt{\cot^2\alpha+1}$$

que reemplazando en [26] da

$$\iint\limits_{\mathbf{r}(t)}\sigma\ dS=\iint\limits_{T}\sigma(u,v)\,\frac{u}{\operatorname{sen}\alpha}\,du\,dv=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{h\cdot\operatorname{tg}\alpha}\sigma(u,v)\,u\,du\right]dv \qquad [29]$$

Si, por ejemplo, $\sigma(u,v)=\text{constante}=\sigma_0$, en cuyo caso se dice que la carcasa es homogénea, se tiene

$$M=\frac{\sigma_0}{\operatorname{sen}\alpha}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{h\cdot\operatorname{tg}\alpha}u\,du\right]dv=\pi\,\sigma_0\,h^2\operatorname{sen}\alpha\,\sec^2\alpha$$

4.2. Campos vectoriales

Sea $S=\mathbf{r}(t)$ una superficie paramétrica descrita por una función diferenciable $\mathbf{r}$ definida en una región T del plano uv, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido y acotado en S.

La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S se representa con los símbolos

$$\iint\limits_{\mathbf{r}(t)}\mathbf{F}\cdot\breve{\mathbf{n}}\,dS$$

$$\iint\limits_{S}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\breve{\mathbf{n}}\,dS \qquad [30]$$

y está definida por la ecuación

$$\iint\limits_{\mathbf{r}(t)}\mathbf{F}\cdot\breve{\mathbf{n}}\,dS=\iint\limits_{T}\mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot\breve{\mathbf{n}}\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|du\,dv \qquad [31]$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

En las expresiones [30] y [31], $\breve{\mathbf{n}}$ es el *vector unitario normal* a S que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector producto vectorial fundamental.

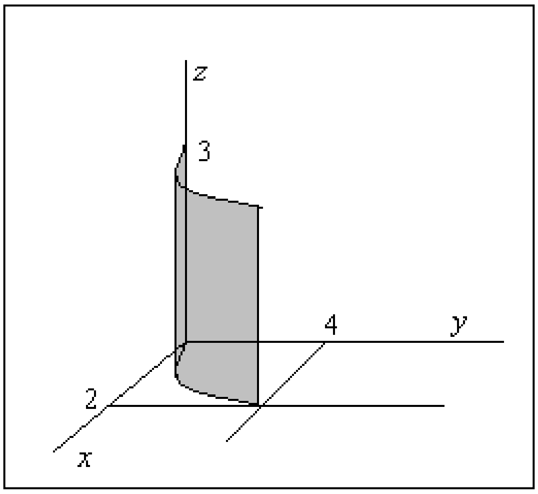
O sea

$$\breve{\mathbf{n}}=\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|} \qquad [32]$$

Ejemplo 4: Flujo a través de una superficie

Calcular el flujo de agua a través del cilindro parabólico S definido por $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 3$ (Figura 3), si el campo vectorial velocidad es $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, medido en $\mathrm{metros/seg}$.

Figura 3



Resolución:

En primer lugar, se deberá representar la superficie S, de alguna de las maneras vistas, por ejemplo, paramétricamente de la siguiente forma

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = v \end{cases} \quad , \quad 0 \le u \le 2 \quad , \quad 0 \le v \le 3 \qquad [33]$$

con lo cual la superficie queda representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + u^2\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k} \qquad [34]$$

Planteando la integral

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot \breve{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{T} \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \breve{\mathbf{n}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad [35]$$

se debe calcular la norma del producto vectorial fundamental, para lo cual previamente se debe computar el producto vectorial fundamental, que es, aplicando [10]

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad [36]$$

que reemplazando en [35] da

$$\iint_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot \breve{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{T} \left(u^2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + uv\,\mathbf{k}\right) \cdot \left(2u\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\right) du\, dv =$$
$$= \int_0^3 \left[\int_0^2 \left(2u^3 - 2\right) du \right] dv = 3\int_0^2 \left(\left(2u^3 - 2\right) du\right) = 12\,\left[\mathrm{metros}^3/\mathrm{seg}\right] \qquad [37]$$

La densidad del agua es $\rho = 1\ \mathrm{gramo/cm^3} = 1\ \mathrm{kg/litro}$ y la respuesta es $12000\ \mathrm{kg/seg}$.

5. Cambio de representación paramétrica en las superficies de integración

Sea una función $\mathbf{r}$ definida en una región A del plano uv que produce una superficie paramétrica $\mathbf{r}(A)$. Sea asimismo A la imagen de una región B del plano st, a través de una aplicación uno a uno derivable con continuidad $\mathbf{G}$ dada por

$$\mathbf{G}(s,t) = U(s,t)\,\mathbf{i} + V(s,t)\,\mathbf{j} \quad , \quad (s,t) \in B \qquad [38]$$

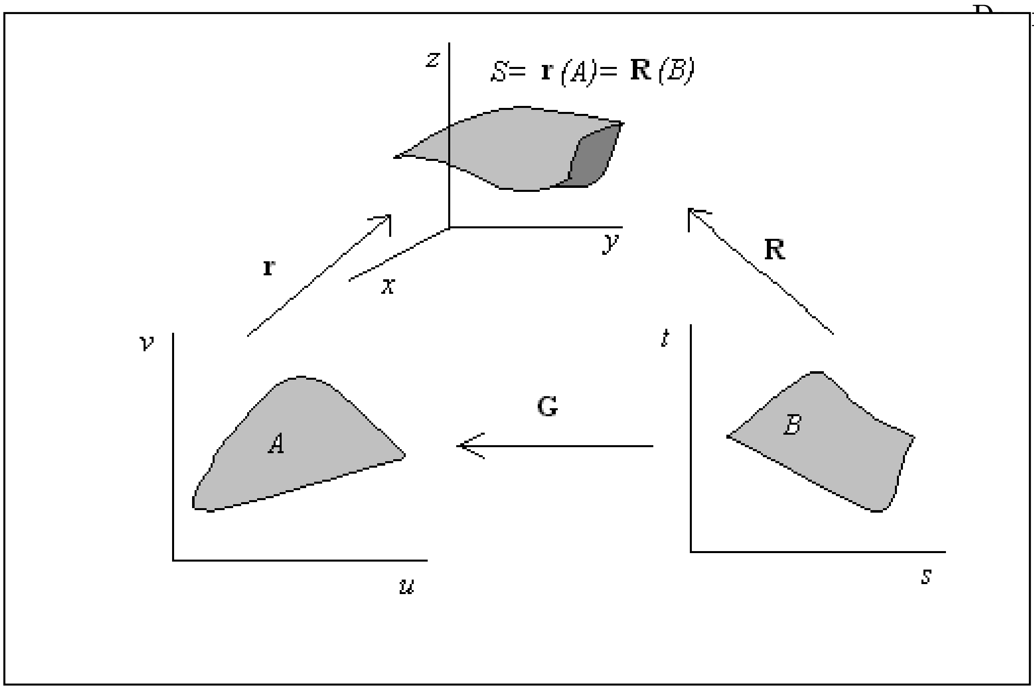
y sea $\mathbf{R}$ una función definida en B mediante la ecuación

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}\left[\mathbf{G}(s,t)\right] \qquad [39]$$

como se esquematiza en la figura 4:

Figura 4

funciones $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ así



5.1. Teorema: Relación entre los productos vectoriales fundamentales de dos funciones regularmente equivalentes.

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ dos funciones regularmente equivalentes ligadas por la ecuación [39], donde $\mathbf{G} = U\,\mathbf{i} + V\,\mathbf{j}$ es una aplicación, uno a uno y derivable con continuidad, de una región B del plano st sobre una región A del plano uv dada por la ecuación [38].

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)} \qquad [40]$$

donde las derivadas parciales $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ están calculadas en el punto $\left[U(s,t),V(s,t)\right]$.

Dicho de otro modo, el producto vectorial fundamental de $\mathbf{R}$ es igual al de $\mathbf{r}$ multiplicado por el determinante Jacobiano de la aplicación $\mathbf{G}$.

Demostración:

Las derivadas $\partial \mathbf{R}/\partial s$ y $\partial \mathbf{R}/\partial t$ pueden calcularse por la derivación de [39]. Se aplica la regla de la cadena a cada componente de $\mathbf{R}$ y se ordenan los términos, resultando

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\dfrac{\partial U}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\dfrac{\partial V}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\dfrac{\partial V}{\partial t} \end{cases} \qquad [41]$$

donde las derivadas parciales $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ están calculadas en el punto $[U(s,t),V(s,t)]$.

Multiplicando vectorialmente las dos ecuaciones [41] se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)} \end{aligned} \qquad [42]$$

que es lo que se quería demostrar.

5.2. Teorema: Invariancia de las integrales de superficie frente a la representación paramétrica.

Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ dos funciones regularmente equivalentes ligadas por la ecuación [39], donde $\mathbf{G} = U\,\mathbf{i} + V\,\mathbf{j}$ es una aplicación, uno a uno y derivable con continuidad, de una región B del plano st sobre una región A del plano uv dada por la ecuación [38] y si la integral de superficie

$$\iint_{\mathbf{r}(A)} f\; dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathbf{r}(A)} \mathbf{f} \cdot \breve{\mathbf{n}}\; dS \qquad [43]$$

existe, entonces también existe

$$\iint_{\mathbf{R}(B)} f\; dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathbf{R}(B)} \mathbf{f} \cdot \breve{\mathbf{n}}\; dS \qquad [44]$$

Y

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{r}(A)} f\; dS &= \iint_{\mathbf{R}(B)} f\; dS \\ \iint_{\mathbf{r}(A)} \mathbf{f} \cdot \breve{\mathbf{n}}\; dS &= \iint_{\mathbf{R}(B)} \mathbf{f} \cdot \breve{\mathbf{n}}\; dS \end{aligned} \qquad [45]$$

respectivamente.

<u>Demostración:</u>

Según la definición de integral de superficie, se tiene que

$$\iint_{\mathbf{r}(A)} f\; dS = \iint_{A} f[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad [46]$$

y, utilizando la aplicación $\mathbf{G}$ del teorema anterior para transformar esta integral doble extendida a una región A del plano uv en una integral doble extendida a una región B del plano st de acuerdo a la fórmula de transformación de las integrales dobles, resulta

$$\iint_{A} f[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv = \iint_{B} f\{\mathbf{r}[\mathbf{G}(s,t)]\} \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \cdot \left| \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)} \right| ds\, dt \qquad [47]$$

en donde las derivadas parciales $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ del segundo miembro están calculadas en el punto $\left[U(s,t),V(s,t)\right]$.

Aplicando [45], la integral sobre B es igual a

$$\iint_B f\left[\mathbf{R}(s,t)\right]\cdot\left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right\| ds\, dt \qquad [48]$$

que es la definición de la integral de superficie $\iint_{\mathbf{R}(B)} f\, dS$, lo cual se completa la demostración.

El mismo razonamiento se puede aplicar para demostrar el teorema cuando la función que se integra es vectorial.

6. Otras notaciones para las integrales de superficie

Sea $S=\mathbf{r}(T)$ una superficie paramétrica, el producto vectorial fundamental

$$\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \qquad [49]$$

es normal a S en cada punto regular de la superficie. En cada uno de tales puntos, existen dos vectores normales unitarios, uno $\mathbf{n}_1$, que tiene la misma dirección que $\mathbf{N}$, y otro, $\mathbf{n}_2$, que tiene la dirección opuesta.

O sea

$$\mathbf{n}_1=\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \quad , \quad \mathbf{n}_2=-\mathbf{n}_1 \qquad [50]$$

La integral de superficie se puede escribir

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \iint_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot\mathbf{n}(u,v)\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| du\, dv\\ &= \pm\iint_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, du\, dv\end{aligned} \qquad [51]$$

donde el signo $+$ se usa si $\mathbf{n}=\mathbf{n}_1$ y el signo - si $\mathbf{n}=\mathbf{n}_2$.

Expresando a $\mathbf{F}$ y a $\mathbf{r}$ en función de sus coordenadas, y calculando el vector producto fundamental con esta notación se tiene

$$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\mathbf{i}+Q(x,y,z)\,\mathbf{j}+R(x,y,z)\,\mathbf{k} \qquad [52]$$

$$\mathbf{r}(u,v)=X(u,v)\,\mathbf{i}+Y(u,v)\,\mathbf{j}+Z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad [53]$$

$$\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{i}+\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{j}+\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k} \qquad [54]$$

Si $\mathbf{n}=\mathbf{n}_1$, la ecuación [51] se transforma en

$$\begin{aligned}&\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS =\\ &=\iint_T P\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv+\iint_T Q\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\,du\,dv+\iint_T R\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv\end{aligned} \qquad [55]$$

mientras que si $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$, cada una de las integrales dobles del segundo miembro debe reemplazarse por su opuesta.

La suma de las integrales dobles del segundo miembro se escriben más brevemente colocando

$$\iint_S P(x,y,x)\, dy \wedge dz + \iint_S Q(x,y,x)\, dz \wedge dx + \iint_S R(x,y,x)\, dx \wedge dy \qquad [56]$$

o en forma más simple

$$\iint_S P\, dy \wedge dz + \iint_S Q\, dz \wedge dx + \iint_S R\, dx \wedge dy \qquad [57]$$

Finalmente, las integrales que aparecen en [56] y [57] pueden expresarse como integrales dobles. Así, por ejemplo

$$\iint_S P\, dy \wedge dz = \iint_T P[\mathbf{r}(u,v)]\, \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\, du\, dv \qquad [58]$$

Si el vector normal unitario $\mathbf{n}$ se expresa en función de sus cosenos directores

$$\mathbf{n} = \cos\alpha \quad \mathbf{i} + \cos\beta \quad \mathbf{j} + \cos\gamma \quad \mathbf{k} \qquad [59]$$

entonces

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P\cos\alpha \quad + Q\cos\beta \quad + R\cos\gamma \qquad [60]$$

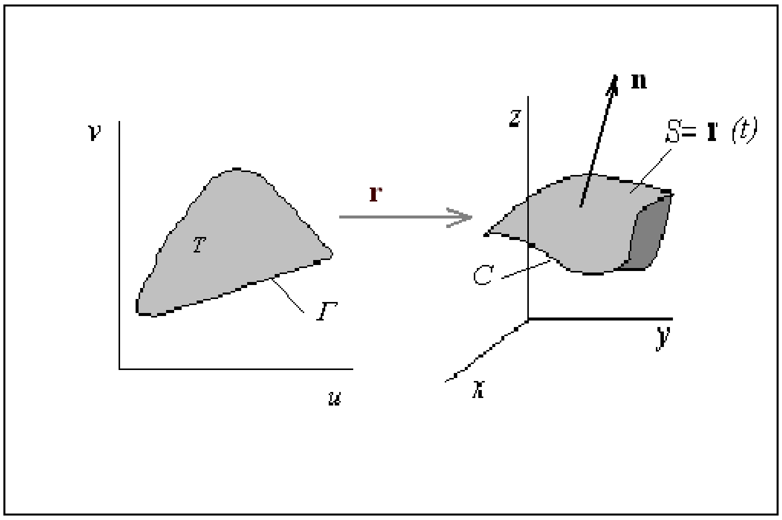
y

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \left(P\cos\alpha \quad + Q\cos\beta \quad + R\cos\gamma \right) dS \qquad [61]$$

7. Teorema de Stokes

Sea S una superficie paramétrica simple regular, $S = \mathbf{r}(T)$, siendo T una región del plano uv limitada por una curva de Jordan regular a trozos Γ, como se muestra en la figura 5:

Figura 5



Sea $\mathbf{r}$ una aplicación uno a uno cuyos componentes tienen derivadas parciales segundas continuas en un cierto conjunto abierto que contenga $T \cup \Gamma$.

Sea C la imagen de Γ por $\mathbf{r}$, y sean P, Q y R campos escalares derivables con continuidad en S.

Entonces

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz+\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx+\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz \quad [62]$$

La curva Γ se recorre en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj) y la curva C en el sentido que resulte de aplicar a Γ la función $\mathbf{r}$.

<u>*Demostración:*</u>

Para demostrar el teorema basta establecer las tres fórmulas siguientes:

$$\int_C P\,dx=\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\wedge dy+\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx\right) \quad [63]$$

$$\int_C Q\,dy=\iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\wedge dz+\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy\right) \quad [64]$$

$$\int_C R\,dz=\iint_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x}\,dz\wedge dx+\frac{\partial R}{\partial y}\,dy\wedge dz\right) \quad [65]$$

La suma de estas tres ecuaciones da la fórmula [62] del teorema.

Sólo resulta necesario demostrar la primera igualdad, ya que para hacerlo con [64] y [65] se utiliza el mismo criterio y se llega a idéntico resultado.

El razonamiento de la demostración es expresar la integral de superficie como una integral doble sobre T. Entonces se aplica el teorema de Green para expresar la integral doble sobre T como una integral de línea sobre Γ. Finalmente se demuestra que esta última integral de línea es igual a $\int_C P\,dx$. Escribiendo

$$\mathbf{r}(u,v)=X(u,v)\,\mathbf{i}+Y(u,v)\,\mathbf{j}+Z(u,v)\,\mathbf{k} \quad [66]$$

y expresando la integral de superficie sobre S de la forma

$$\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\wedge dy+\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx\right)=\iint_T \left\{-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right\} du\,dv \quad [67]$$

se designa con p a la función compuesta dada por

$$p(u,v)=P[X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)] \quad [68]$$

por lo que el integrando de [67] puede escribirse en la forma

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p\frac{\partial X}{\partial u}\right) \quad [69]$$

y aplicando a la integral doble sobre T de [67] el teorema de Green se obtiene

$$\iint_T \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right\} du\,dv=\int_\Gamma p\frac{\partial X}{\partial u}\,du+p\frac{\partial X}{\partial v}\,dv \quad [70]$$

en donde Γ se recorre en sentido positivo. Representando a Γ en forma paramétrica mediante una función $\boldsymbol{\gamma}$ definida en un intervalo $[a,b]$ y sea

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{r}[\boldsymbol{\gamma}(t)] \quad [71]$$

la correspondiente representación paramétrica de C. Expresando entonces cada integral de línea en función de su representación paramétrica, se encuentra que

$$\int_{\Gamma} p\frac{\partial X}{\partial u}\,du + p\frac{\partial X}{\partial v}\,dv = \int_{C} P\,dx \qquad [72]$$

que completa la demostración.

8. Teorema de la divergencia

Si V es un sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por una superficie S, si $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a S y si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en V, entonces

$$\iiint_V \left(\operatorname{div}\mathbf{F}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad [73]$$

o, lo que es lo mismo,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS \qquad [74]$$