

## Tema 9. Integrales de línea

### 1. Introducción

Se extiende el concepto de integral definida de funciones reales de una variable real en un sentido diferente al visto en el Tema 7.

Se abordará el tema de las integrales de línea o integrales curvilíneas en las que el intervalo de integración que se considera en aquellas se transforma en un camino de integración en el espacio.

Por otra parte, no sólo se van a integrar campos escalares sino también campos vectoriales, en los que este tipo de integrales tienen el mayor número de aplicaciones.

### 2. Longitud de una curva

Para acercarnos al concepto de camino de integración, que resultará necesario para definir una integral de línea, se comienza por establecer la longitud de una curva.

La idea para calcular la longitud de una curva contenida en el plano o en el espacio consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos en  $C$  y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos, como se describe en las Figuras 1a, 1b y 1c.

Figura 1a

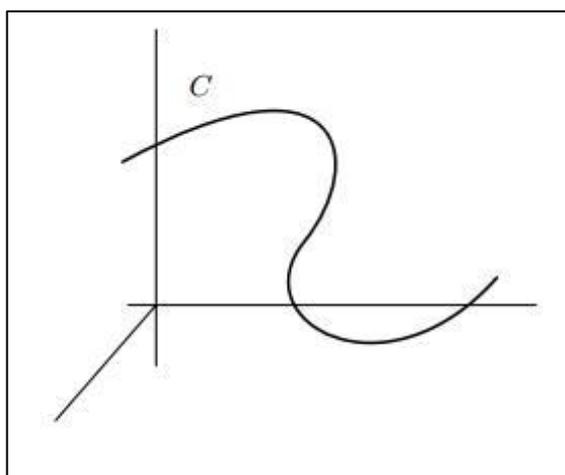


Figura 1b

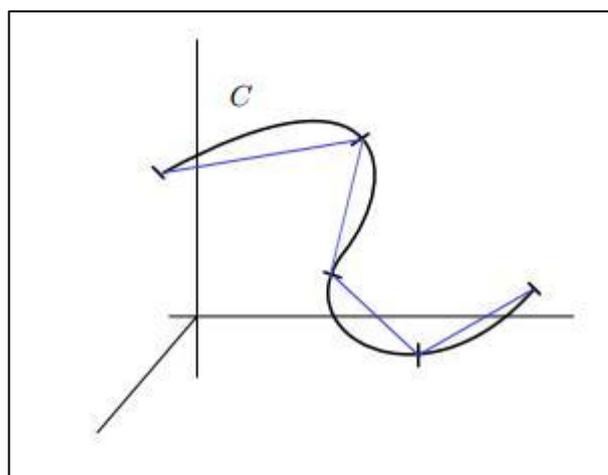
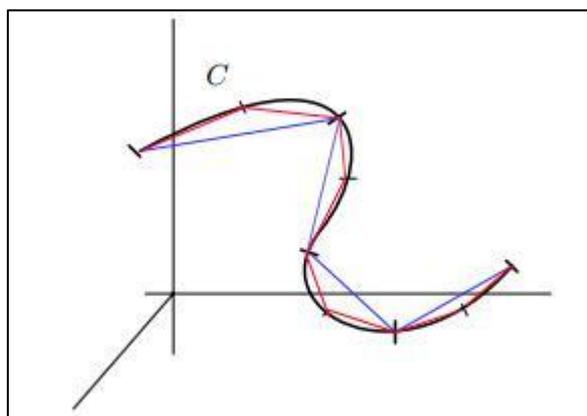


Figura 1c



Se define una parametrización a través de la función vectorial  $\mathbf{r}(t):J\rightarrow\mathbb{R}^n$ , continua en  $J$ , donde  $J = [a,b]$  es un intervalo cerrado finito en  $\mathbb{R}^1$ .

Este tipo de funciones pueden representar un **camino continuo en el  $n$ -espacio**. A su vez, el camino se llama **regular** si existe la derivada  $\mathbf{r}'(t)$  en todo punto de  $J$  y es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

El camino se llama **regular a trozos** si el intervalo  $[a, b]$  puede descomponerse en un número finito de *subintervalos* en cada uno de los cuales el camino es regular.

Dividiendo el intervalo  $J = [a, b]$  en una partición  $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k = b\}$ , se puede aproximar el cálculo de la longitud de arco  $\mathbf{r}([t_i, t_{i+1}])$  como la longitud del segmento  $[\mathbf{r}(t_i), \mathbf{r}(t_{i+1})]$ .

Entonces lo que se afirma es que, llamando  $L$  a la longitud del arco de curva entre dos puntos de la partición, se tiene:

$$L(\mathbf{r}([t_i, t_{i+1}])) \cong \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| = \sum_{j=1}^n |r_j(t_{i+1}) - r_j(t_i)|^2 \quad [1]$$

y, aplicando el teorema del valor medio a cada diferencia,

$$|r_j(t_{i+1}) - r_j(t_i)| = |r'_j(s_i)| \cdot |t_{i+1} - t_i| \quad \text{con } s_i \in [t_i, t_{i+1}] \quad [2]$$

A su vez, en la medida que los intervalos de la partición se hacen más pequeños y mientras la función derivada  $\mathbf{r}'(t)$  sea continua, es válido suponer que  $r'_j(s_i) = r'_j(t_i)$ , por lo que [1] se puede expresar:

$$\|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\| = \sum_{j=1}^n |r'_j(t_i)|^2 \cdot |t_{i+1} - t_i|^2 = \|\mathbf{r}'(t_i)\| \cdot |t_{i+1} - t_i| \quad [3]$$

Y la longitud total de la curva resulta en

$$L(C) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\mathbf{r}([t_i, t_{i+1}])) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{r}'(t_i)\| \cdot |t_{i+1} - t_i| \quad [4]$$

El valor de esta sumatoria está entre los valores de la suma inferior y la suma superior de Riemann de la función  $g(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ , asociadas a la partición  $P$ .

A medida que las particiones sean cada vez más finas, las sumas superiores e inferiores tienden a la integral de Riemann y se obtiene la definición de la longitud de  $C$  como

$$L(C) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad [5]$$

Independientemente de la representación paramétrica utilizada.

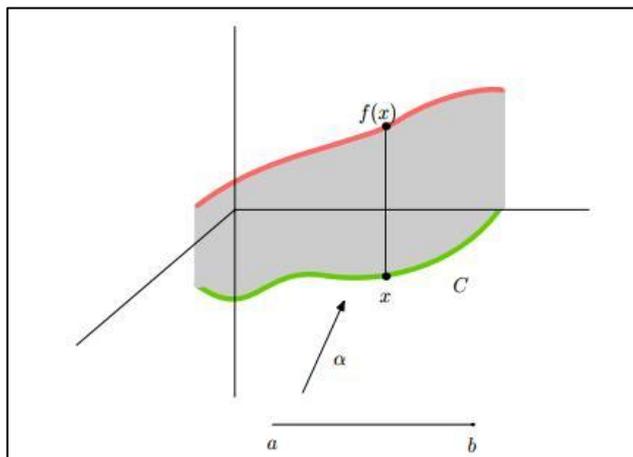
### **3. Integral de línea de un campo escalar**

Para entender el significado de la definición de integral de línea de un campo escalar, se considera el siguiente ejemplo: Sea una curva  $C$  en  $\mathbb{R}^2$ , parametrizada por una función vectorial  $\mathbf{r}(t): J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , continua en  $J$ , donde  $J = [a, b]$  es un intervalo cerrado finito en  $\mathbb{R}^1$ . Sea una función  $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

La representación gráfica de la función  $f$  sobre la curva  $C$  se puede asimilar a un muro que se levanta una altura  $f(x, y)$  sobre cada punto de  $C$ .

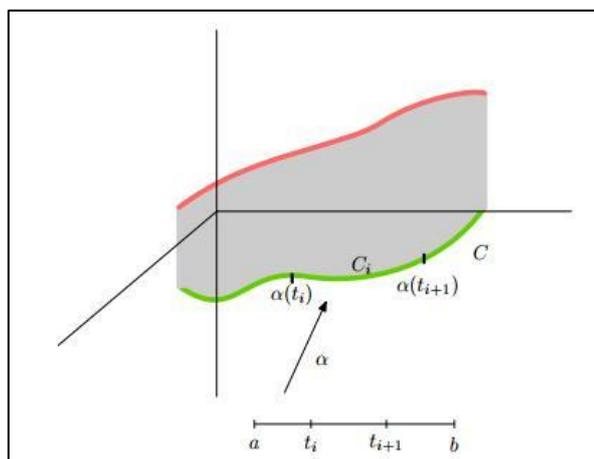
Se trata ahora de calcular el área de ese muro entre la curva  $C$  y la gráfica de  $f$ , como se representa en la Figura 2:

Figura 2



y dividiendo el intervalo  $J = [a, b]$  en una partición  $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k = b\}$ , se tiene:

Figura 3



La curva  $C$  queda dividida en una unión de arcos  $C_i = \mathbf{r}([t_{i-1}, t_i])$ . Y el muro en una unión de rectángulos de base  $C_i$  y una altura que oscilará entre  $f[x(t_{i-1}), y(t_{i-1})]$  y  $f[x(t_i), y(t_i)]$ .

Suponiendo que la función, a lo largo de cada uno de estos pequeños arcos  $C_i$  de longitud  $L(C_i)$  en los que se divide la curva tomara como máximo valor  $M_{C_i}$  y como menor valor  $m_{C_i}$ , se pueden definir las sumas superiores e inferiores

$$S = \sum_{i=1}^n M_{C_i} \cdot L(C_i) \quad [6]$$

$$s = \sum_{i=1}^n m_{C_i} \cdot L(C_i) \quad [7]$$

y en la medida de que la longitud de los arcos  $C_i$  se haga infinitamente pequeña se define a la integral de línea de la función  $f(x, y)$  definida a lo largo de toda la curva  $C$  recorrida en un determinado sentido como:

$$\int_C f(x, y) \cdot dC = \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad [8]$$

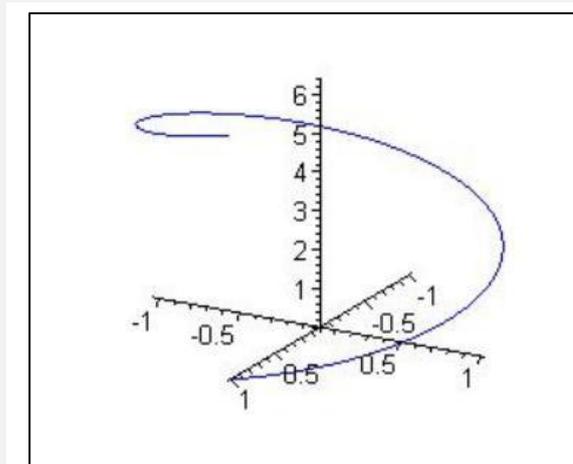
Si  $C$  es una curva regular a trozos, se define la integral de  $f(x, y)$  a lo largo de  $C$  como la suma de las integrales en cada trozo regular.

Si  $C$  es una curva cerrada, se puede dividir por tres puntos, y considerarla como una curva regular a trozos

Ejemplo 1:

Sea  $C$  definida por la Figura 4 y  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , determinar  $\int_C f(x, y, z) \cdot dC$ .

Figura 4



*Resolución:*

El primer paso es determinar la representación paramétrica de  $C$  y el intervalo en el que se mueve el parámetro. Analizada la Figura 4, surge que

$$C \equiv \mathbf{r}(t) = \cos t \hat{\mathbf{i}} + \sin t \hat{\mathbf{j}} + t \hat{\mathbf{k}}, \text{ con } t \in [0, 2\pi] \quad [9]$$

Se determina  $\mathbf{r}'(t)$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \hat{\mathbf{i}} + \cos t \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad [10]$$

y, entonces

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \quad [11]$$

La integral de línea resulta:

$$\int_C f(x, y, z) \cdot dC = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \cdot \sqrt{2} dt \quad [12]$$

Remplazando queda:

$$\int_C f(x, y, z) \cdot dC = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right)$$

Ejemplo 2

Calcular la masa  $M$  de un resorte que tiene forma de hélice cuya ecuación vectorial es  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \hat{\mathbf{i}} + a \sin t \hat{\mathbf{j}} + bt \hat{\mathbf{k}}$ , si la densidad en  $(x, y, z)$  es  $x^2 + y^2 + z^2$ .

Resolución:

La integral que produce  $M$  es

$$M = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) s'(t) dt \quad [13]$$

como

$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k} \quad [14]$$

resulta

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad [15]$$

con lo que, reemplazando en [8] queda

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( 2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2 \right) \quad [16]$$

#### **4. Integral de línea de un campo vectorial**

Sea  $\mathbf{r}(t)$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio definido en un intervalo  $[a, b]$ , y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica de  $\mathbf{r}$ . La **integral de línea** de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\mathbf{r}$  se representa con el símbolo  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  y se define por

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad [17]$$

siempre que la integral del segundo miembro exista.

#### **5. Otras notaciones para las integrales de línea**

Si  $C$  representa la gráfica de  $\mathbf{r}$ , la integral de línea  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  también se representa por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [18]$$

y se llama **integral de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$** .

Si  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$  representan los puntos extremos de  $C$ , la integral de línea puede expresarse

$$\int_a^b \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [19]$$

y se denomina **integral de línea de  $\mathbf{F}$  desde  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  a lo largo de  $\mathbf{r}$** .

Cuando  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  el camino se llama **cerrado**. En este caso se utiliza el símbolo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [20]$$

para indicar la integración a lo largo de un camino cerrado.

Cuando  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{r}$  se expresan en función de sus componentes, o sea  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$  y  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$  la integral del segundo miembro de [17] se convierte en una suma de integrales:

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b f_k[\mathbf{r}(t)] \cdot r'_k(t) dt \quad [21]$$

En este caso, la integral de línea también se escribe de la forma

$$\int f_1 dr_1 + \dots + f_n dr_n \quad [22]$$

En el caso 2 – dimensional, comúnmente el camino  $\mathbf{r}$  se define con un par de ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} x = r_1(t) \\ y = r_2(t) \end{cases} \quad [23]$$

resultando

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f_1 dx + f_2 dy = \int_C f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy \quad [24]$$

En el caso 3 – dimensional, comúnmente el camino  $\mathbf{r}$  se define con tres ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} x = r_1(t) \\ y = r_2(t) \\ z = r_3(t) \end{cases} \quad [25]$$

resultando

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \\ &= \int_C f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz \end{aligned} \quad [26]$$

Ejemplo 3:

Sea  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y} \mathbf{i} + (x^3 + y) \mathbf{j}$ , definido para todo  $(x, y)$  con  $y \geq 0$ . Calcular la integral de línea de  $\mathbf{f}$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 1)$  a lo largo de cada uno de los siguientes caminos:

- a. la recta de ecuaciones paramétricas  $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$
- b. el camino de ecuaciones paramétricas  $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$

Resolución:

Consigna a

Se toma  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j}$ . Entonces  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  y  $\mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] = \sqrt{t} \mathbf{i} + (t^3 + t) \mathbf{j}$ , por lo tanto, aplicando [17] resulta

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [\sqrt{t} \mathbf{i} + (t^3 + t) \mathbf{j}] \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

Consigna b

Se toma  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$ . Entonces  $\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}$  y  $\mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] = t^{3/2} \mathbf{i} + (t^6 + t^3) \mathbf{j}$ , por lo tanto, aplicando [17] resulta

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [t^{3/2} \mathbf{i} + (t^6 + t^3) \mathbf{j}] \cdot (2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42} \end{aligned}$$

Verificación de la consigna b con otra representación paramétrica de  $C$

Cambiando la representación paramétrica de la curva, representándola de manera más sencilla mediante  $\mathbf{v}(t) = t \mathbf{i} + t^{3/2} \mathbf{j}$ .

Entonces  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{i} + \frac{3}{2}t^{1/2} \mathbf{j}$  y  $\mathbf{f}[\mathbf{v}(t)] = t^{3/4} \mathbf{i} + (t^3 + t^{3/2}) \mathbf{j}$ , por lo tanto, aplicando [17] resulta

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left[ t^{3/4} \mathbf{i} + (t^3 + t^{3/2}) \mathbf{j} \right] \cdot \left( \mathbf{i} + \frac{3}{2}t^{1/2} \mathbf{j} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{7/2} + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \frac{4}{7}t^{7/4} + \frac{1}{3}t^{9/2} + \frac{1}{2}t^3 = \frac{59}{42} \end{aligned}$$

**Comentario 1:** El valor de la integral de línea desde un punto a otro puede depender del camino que los une.

**Comentario 2:** El valor de la integral de línea desde un punto a otro no depende de la representación paramétrica utilizada.

## 6. Aplicación: trabajo realizado por una fuerza a lo largo de un camino

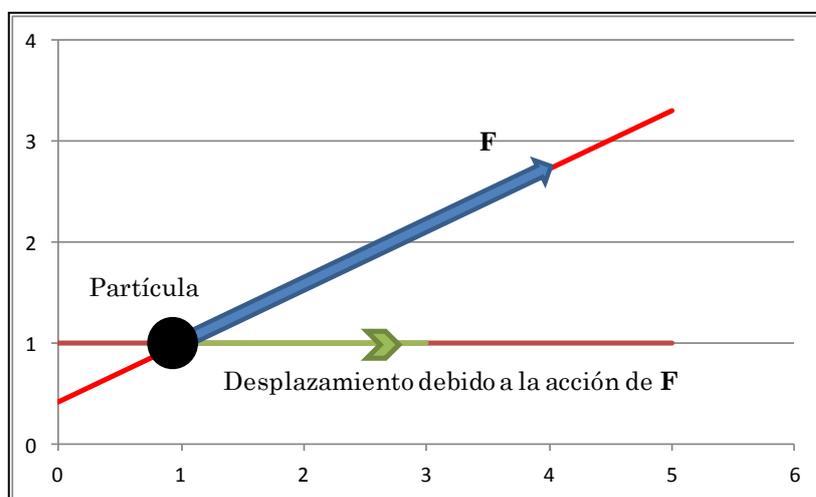
### Ejemplo 4:

Sea la fuerza  $\mathbf{F}$  un vector que pertenece a  $\mathbb{R}^2$  que se aplica a una partícula cuyo movimiento, en consecuencia, también está restringido al plano  $x, y$ .

El trabajo de una fuerza al mover una partícula en el plano viene dado, en general, a partir del concepto de que el trabajo ( $W$ , escalar) es efectuado por la componente de la fuerza  $\mathbf{F}$ , vectorial, en la dirección del movimiento, cuando el cuerpo se desplaza una cantidad medible en unidades de longitud.

En la Figura 5 se representa figuradamente una fuerza  $\mathbf{F}$  de módulo 3, aplicada en la dirección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al eje de las  $x$ , que actúa sobre una partícula ubicada en el punto del plano  $(1, 1)$  y la desplaza hasta el punto  $(3, 1)$ .

Figura 5



Una forma de calcular el trabajo realizado por la fuerza en este caso es plantear la expresión:

$$W = \|\mathbf{F}\| \cdot \mathbf{d} \tag{26}$$

En este caso, aplicando los datos del problema y la definición del producto escalar, se tiene que

$$W = 3 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 3 \cdot \sqrt{3} \tag{27}$$

Este mismo cálculo se puede plantear de otra manera, desde el punto de vista del concepto de la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de un camino regular.

En este caso es de aplicación la fórmula [17] para lo cual hay que identificar los elementos que en ella deben intervenir.

El vector  $\mathbf{F}$  se desplaza a lo largo del camino  $C$  que, en este caso está dado por el segmento que comienza en el punto (1,1) y termina en el punto (3,1)

En este caso, la representación paramétrica del camino es

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \quad [28]$$

El vector  $\mathbf{F}$  es constante y sus componentes, que no dependen del camino  $C$  ni de los valores que toma  $\mathbf{r}(t)$  son:

$$\mathbf{F} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \quad [29]$$

A partir de [28] se puede determinar la derivada de  $\mathbf{r}(t)$ , que resulta en:

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} \quad [30]$$

y, aplicando la fórmula [17] se tiene que

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_1^3 \left( 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}} dt \quad [31]$$

que resulta en el mismo valor que 27, es decir

$$W = 3 \cdot \sqrt{3} \quad [32]$$

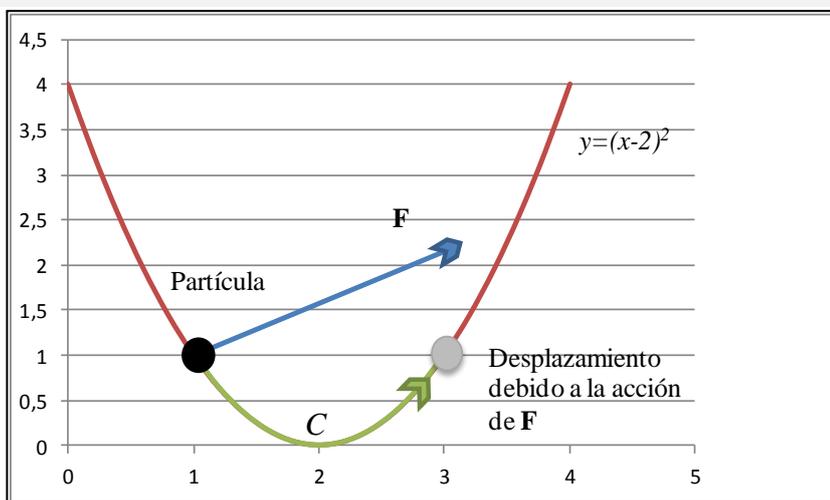
Entonces, el resultado de aplicar en concepto de integral de línea a un problema relacionado por el trabajo de una fuerza, sobre una partícula, a lo largo de un camino es perfectamente compatible y abarcativo de los cálculos más elementales.

Estos cálculos elementales que se reducen a multiplicaciones, no son suficientes cuando problemas tan simples como determinar el trabajo realizado por una fuerza se plantean con más cercanía a la realidad.

Ejemplo 5:

En la Figura 6 se representa una fuerza  $\mathbf{F}$  de módulo 3, aplicada en la dirección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al eje de las x, que actúa sobre una partícula ubicada en el punto del plano (1, 1) y la desplaza hasta el punto (3,1), a lo largo del camino  $C$ .

Figura 6



Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  cuando desplaza la partícula desde el punto (1,1) al punto (3,1) a lo largo del camino  $C$ .

Aún siendo la fuerza constante no resulta posible aplicar el mismo criterio que el que se mostró cuando la trayectoria era rectilínea. En cada punto del camino por el que se desplaza la partícula la componente de la fuerza que actúa en la dirección del desplazamiento cambia.

Es decir, la alternativa que queda para determinar el trabajo  $W$  realizado por la misma es aplicar el concepto de integral de línea de una función vectorial (en este caso constante) a lo largo de un camino definido por una curva en el plano.

Para aplicar la fórmula [17] nuevamente hay que identificar los elementos que en ella deben intervenir.

El vector  $\mathbf{F}$  se desplaza a lo largo del camino  $C$  que, en este caso está dado por la parábola que une el punto (1,1) con el punto (3,1), definida por la ecuación  $y=(x-2)^2$

En este caso, la representación paramétrica del camino es

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t-2)^2\mathbf{j} \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \quad [33]$$

El vector  $\mathbf{F}$  es constante y sus componentes, que no dependen del camino  $C$  ni de los valores que toma  $\mathbf{r}(t)$  son:

$$\mathbf{F} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \quad [34]$$

A partir de [33] se puede determinar la derivada de  $\mathbf{r}(t)$ , que resulta en:

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + 2 \cdot (t-2)\hat{\mathbf{j}} \quad [35]$$

y, aplicando la fórmula [17] se tiene que

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_1^3 \left( 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot (\hat{\mathbf{i}} + 2 \cdot (t-2)\hat{\mathbf{j}}) dt \quad [36]$$

o sea

$$W = \int_1^3 \left( 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3t - 6 \right) dt = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{3}{2} t^2 - 6t \Big|_1^3 = 3 \cdot \sqrt{3} + 12 - 12 = 3 \cdot \sqrt{3} \quad [37]$$

que resulta en el mismo valor que [27] y [32], es decir, que en este caso, el trabajo que realiza la fuerza para desplazar la partícula, sea por un camino o por el otro, el mismo. Esta fuerza puede ser un campo vectorial conservativo.

Ejemplo 6:

Considere que en el problema del Ejemplo 4 la fuerza  $\mathbf{F}$  no es constante sino que se expresa por:

$$\mathbf{F} = y^2 \hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]$$

y que actúa sobre una partícula ubicada en el punto del plano (1, 1) y la desplaza hasta el punto (3,1), a lo largo del segmento que los une.

Para aplicar la fórmula [17] nuevamente hay que identificar los elementos que intervienen.

El vector  $\mathbf{F}$  se desplaza a lo largo del camino  $C$  que, en este caso está dado por el segmento que une el punto  $(1,1)$  con el punto  $(3,1)$ , y es definida por la ecuación  $y=1$ .

En este caso, la representación paramétrica del camino es

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \quad [38]$$

El vector  $\mathbf{F}$  se debe expresar en términos de  $t$ , según la ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \quad [39]$$

y sus componentes, que ahora dependen del camino  $C$  y de los valores que toma  $\mathbf{r}(t)$  son:

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = (y(t))^2 \hat{\mathbf{i}} + x(t)\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}} \quad [40]$$

A partir de [38] se puede determinar la derivada de  $\mathbf{r}(t)$ , que resulta en:

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} \quad [41]$$

y, aplicando la fórmula [17] se tiene que

$$W = \int_1^3 (\hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}}) \bullet \hat{\mathbf{i}} dt = t \Big|_1^3 = 2 \quad [42]$$

Ejemplo 7:

Se considera el camino del Ejemplo 5 y la fuerza del Ejemplo 6 y se debe calcular el trabajo puesto en juego.

El vector  $\mathbf{F}$  se desplaza a lo largo del camino  $C$  que, en este caso está dado por la parábola que une el punto  $(1,1)$  con el punto  $(3,1)$ , definida por la ecuación  $y=(x-2)^2$

En este caso, la representación paramétrica del camino es

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t-2)^2\mathbf{j} \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \quad [43]$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = (y(t))^2 \hat{\mathbf{i}} + x(t)\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}} \quad [44]$$

A partir de [43] se puede determinar la derivada de  $\mathbf{r}(t)$ , que resulta en:

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + 2 \cdot (t-2)\hat{\mathbf{j}} \quad [45]$$

y, aplicando la fórmula [17] se tiene que

$$W = \int_1^3 ((t-2)^4 \hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}}) \bullet (\hat{\mathbf{i}} + 2 \cdot (t-2)\hat{\mathbf{j}}) dt = \int_1^3 [(t-2)^4 + 2t^2 - 4t] dt \quad [46]$$

o sea

$$W = \frac{1}{5}(t-2)^5 + \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{52}{3} - 16 = \frac{26}{15} \quad [47]$$

El análisis de los resultados obtenidos en los ejemplos 4 al 7 posibilita extraer conclusiones fundamentales para interpretar los resultados de las integrales de línea de campos vectoriales.

## 7. Propiedades de las integrales de línea

### 7.1. Linealidad respecto al integrando:

$$\int_C [af(x, y) + bg(x, y)] \cdot dC = a \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| dt + b \int_a^b g[\mathbf{r}(t)] \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad [48]$$

$$\int_C (a\mathbf{f} + b\mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} = a \cdot \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + b \cdot \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} \quad [49]$$

### 7.2. Aditividad respecto al camino de integración:

Sea una curva  $C = C_1 \cup C_2$ , entonces

$$\int_C f(x, y) \cdot dC = \int_{C_1} f(x, y) \cdot dC + \int_{C_2} f(x, y) \cdot dC \quad [50]$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad [51]$$

#### Ejemplo 8:

Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$ . Si la velocidad de la partícula en el instante  $t$  es  $v(t)$ , su energía cinética está definida por  $\frac{1}{2}m[v(t)]^2$ .

Demostrar que la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por  $\mathbf{f}$  durante dicho intervalo de tiempo.

#### Resolución:

Sea  $\mathbf{r}(t)$  la posición de la partícula en el instante  $t$ . El trabajo realizado por  $\mathbf{f}$  durante el intervalo de tiempo  $[a, b]$  es

$$\int_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad [51]$$

y lo que se debe demostrar es

$$\int_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2 \quad [52]$$

De acuerdo a la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene que

$$\mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] = m\mathbf{r}''(t) = m\mathbf{v}'(t) \quad [53]$$

donde  $\mathbf{v}(t)$  designa el vector velocidad en el instante  $t$ . Como la velocidad es la longitud del vector velocidad,  $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ .

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{v}(t) = m\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \\ &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2(t)) \end{aligned} \quad [54]$$

Integrando entre  $a$  y  $b$  se obtiene

$$\int_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \frac{1}{2}m[v(t)]^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2 \quad [55]$$

que es lo que se quería probar.

## 8. Teoremas del Cálculo para integrales de línea

### 8.1. Teorema 1

Si  $\varphi$  es un campo escalar diferenciable con gradiente continuo  $\nabla\varphi$  en un conjunto conectado abierto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces para dos puntos cualesquiera  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  unidos por un camino regular a trozos  $\mathbf{r}$  situado en  $S$ , se tiene que

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) \quad [56]$$

*Demostración:*

Sea  $\varphi$  un campo escalar diferenciable con gradiente continuo  $\nabla\varphi$  en  $S$ . Sean dos puntos cualesquiera  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  de  $S$  unidos por un camino regular  $\mathbf{r}(t)$  situado en  $S$  definido en un intervalo  $a \leq t \leq b$ .

La integral de línea del  $\nabla\varphi$  entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  a lo largo de  $\mathbf{r}(t)$  viene dada por

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla\varphi[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad [57]$$

y, aplicando la regla de la cadena resulta

$$\nabla\varphi[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) = g'(t) \quad [58]$$

en donde  $g$  es la función compuesta definida en  $[a, b]$  por la fórmula

$$g(t) = \varphi[\mathbf{r}(t)] \quad [59]$$

La derivada  $g'$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  debido a que  $\nabla\varphi$  es continuo en  $S$  y  $\mathbf{r}$  es regular.

Por lo tanto, aplicando uno de los teoremas fundamentales del cálculo para funciones reales de una variable real<sup>1</sup>

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = \varphi[\mathbf{r}(b)] - \varphi[\mathbf{r}(a)] = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) \quad [60]$$

que es lo que se quería demostrar.

Si el camino es regular a trozos, se lo puede dividir en un número determinado de caminos regulares, por lo cual se puede aplicar el anterior resultado a cada camino correspondiente a cada subintervalo y luego sumar cada integral, llegando a la misma demostración.

*Consecuencia 1:* La integral de línea de un gradiente es independiente del camino en cualquier conjunto  $S$  conectado en el que el gradiente sea continuo.

*Consecuencia 2:* La integral de línea de un gradiente continuo es **cero** a lo largo de un camino regular a trozos **cerrado** en cualquier conjunto  $S$ .

### 8.2. Teorema 2

Sea  $\mathbf{f}$  un campo vectorial continuo en un conjunto conectado abierto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  y sea la integral de línea de  $\mathbf{f}$  independiente del camino en  $S$ . Sea  $\mathbf{a}$  un punto fijo de  $S$ .

Sea el campo escalar  $\varphi$  en  $S$  definido mediante la ecuación

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad [61]$$

<sup>1</sup> **Teorema:** Si  $f(x)$  es una función real continua en un intervalo cerrado  $a \leq x \leq b$ , si existe la integral  $\int_a^b f'(x) dx$  y  $f'(x)$  es continua en el intervalo abierto  $a < x < b$ , entonces  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

en la que  $\mathbf{r}$  es un camino regular a trozos de  $S$  que une  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{x}$ .

Entonces, para todo  $\mathbf{x}$  de  $S$ , resulta

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad [62]$$

Demostración:

Se demostrará que existe la derivada parcial  $D_k \varphi(\mathbf{x})$  y es igual a  $f_k(\mathbf{x})$ , componente  $k$ -ésima de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  y cada  $\mathbf{x} \in S$ .

Sea  $N(\mathbf{x}, r)$  un entorno con centro en  $\mathbf{x}$  y radio  $r$  contenido en  $S$ .

Si  $\mathbf{y}$  es un vector unitario, el punto  $\mathbf{x} + h\mathbf{y}$  también estará contenido en  $S$  para todo  $h$  real que satisfaga la condición  $0 < |h| < r$ , y se puede formar el cociente de las diferencias

$$\frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})}{h} \quad [63]$$

En virtud de la propiedad aditiva de las integrales de línea, el numerador de este cociente puede escribirse de la forma:

$$\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + h\mathbf{y}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad [64]$$

y el camino que une  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} + h\mathbf{y}$  puede ser cualquier camino regular a trozos contenido en  $S$ . En particular, se puede emplear el segmento de recta representado por

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t h \mathbf{y}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad [65]$$

Como  $\mathbf{r}'(t) = h\mathbf{y}$ , el cociente de las diferencias toma la forma

$$\frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{x} + t h \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} dt \quad [66]$$

y si ahora se toma  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_k$ , la expresión [66] queda

$$\frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = \int_0^1 f_k(\mathbf{x} + t h \mathbf{e}_k) dt \quad [67]$$

Mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} u = ht \\ du = h dt \end{cases} \quad [68]$$

la ecuación [67] se puede escribir

$$\frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h f_k(\mathbf{x} + u\mathbf{e}_k) du = \frac{g(h) - g(0)}{h} \quad [69]$$

en donde  $g$  es la función definida en un intervalo abierto  $(-r, r)$  por la ecuación

$$g(t) = \int_0^t f_k(\mathbf{x} + u\mathbf{e}_k) du \quad [70]$$

Como cada componente  $f_k$  es continua en  $S$ , un teorema fundamental del cálculo para

integrales ordinarias<sup>1</sup> establece que existe  $g'(t)$  para cada  $t$  en  $(-r, r)$  y que

$$g'(t) = f_k(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) \quad [71]$$

y que, en particular  $g'(0) = f_k(\mathbf{x})$ . Es decir que, haciendo  $h \rightarrow 0$  en [69], se encuentra que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(\mathbf{x}) \quad [72]$$

como se quería demostrar.

## 9. Teoremas de Green

### 9.1. Regiones planas limitadas por curvas de Jordan<sup>2</sup> regulares a trozos

Sean  $P$  y  $Q$  campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto  $S$  del plano  $xy$ . Sea  $C$  una curva de Jordan regular a trozos y  $R$  la unión de  $C$  y su interior. Sea  $R \subseteq S$ . Entonces

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy \quad [73]$$

en la que la integral de línea se toma alrededor de  $C$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.

La identidad [53] es equivalente a las dos fórmulas [74] y [75]:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy \quad [74]$$

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx \quad [75]$$

### 9.2. Demostración para regiones tipo I

Se demostrará [75] para una región  $R$  del tipo I.

Este tipo de región, que se muestra en la figura 5, tiene la forma

$$R = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x) \right\} \quad [76]$$

en donde  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  siendo  $f \leq g$ .

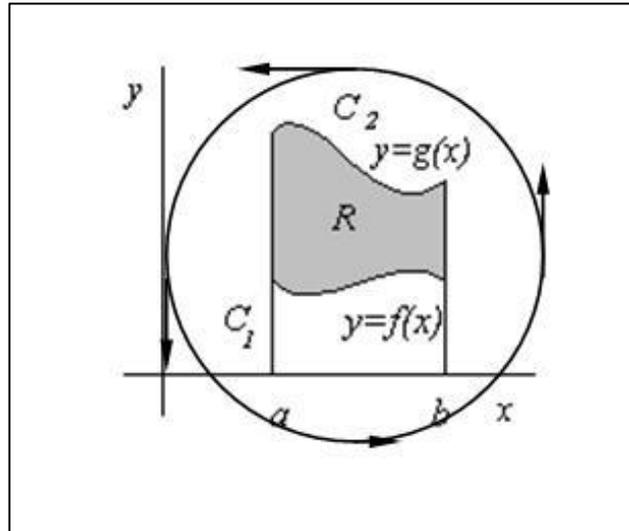
Mediante integraciones sucesivas se calcula la integral doble

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b \left[ \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \\ &= \int_a^b P[x, f(x)] dx - \int_a^b P[x, g(x)] dx \end{aligned} \quad [77]$$

<sup>1</sup> **Teorema:** Sea  $f$  una función continua, entonces si  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ , en los puntos de continuidad de  $f$  se tiene que  $F'(x) = f(x)$

<sup>2</sup> **Curva de Jordan:** curvas cerradas simples planas. Una curva cerrada simple es aquella que, si se representa mediante  $\mathbf{r}(t)$  debe cumplir que con  $a \leq t \leq b$  sea  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$  y que para todo par de valores  $t_1 \neq t_2$  sea  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$

Figura 5



La frontera  $C$  de  $R$  consta de cuatro partes. Un arco inferior  $C_1$  (gráfica de  $f$ ), otro superior  $C_2$  (gráfica de  $g$ ), y dos segmentos rectilíneos verticales recorridos en el sentido indicado en la figura 5.

De la misma figura surge que:

$$\oint_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx \quad [78]$$

puesto que la integral de línea a lo largo de cada segmento vertical es cero.

Para calcular la integral a lo largo de  $C_1$  se puede utilizar la representación vectorial  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$  y se obtiene

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P[t, f(t)] dt \quad [79]$$

Para calcular la integral a lo largo de  $C_2$  se puede utilizar la representación vectorial  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$  y, teniendo en cuenta la inversión del sentido, se obtiene

$$\int_{C_2} P dx = -\int_a^b P[t, g(t)] dt \quad [80]$$

resultando

$$\int_C P dx = \int_a^b P[t, f(t)] dt - \int_a^b P[t, g(t)] dt \quad [81]$$

Por otra parte, la integral de línea puede expresarse

Comparando [80] con [75], queda demostrada [75]. Para demostrar [74] se utiliza un razonamiento parecido con una región del tipo II. Se obtiene de este modo una demostración del teorema de Green para regiones que son simultáneamente de ambos tipos.

Hecho esto, puede demostrarse el teorema para regiones  $R$  que pueden descomponerse en un número finito de regiones que cumplen con la condición de ser simultáneamente de ambos tipos, introduciendo subregiones y sumando los resultados.

Ejemplo 9:

Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas  $\mathbf{f}(x, y) = (y + 3x)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$  al mover una partícula rodeando una vez la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$  en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Resolución:

El trabajo realizado es igual a  $\oint_C P dx + Q dy$ , donde  $P = y + 3x$ ,  $Q = 2y - x$ , y  $C$  es la elipse.

Como  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$ , aplicando el teorema de Green se obtiene

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R (-2) dx dy = -2 \cdot \iint_R dx dy = -2 \cdot a(R) \quad [82]$$

donde  $a(R)$  es el área interior a la elipse.

Ya que esta elipse tiene semiejes  $a = 1$  y  $b = 2$ , su área es  $\pi \cdot a \cdot b = 2\pi$  y el valor de la integral de línea es  $-4\pi$ .