Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares

Autor: Gustavo Lores

Función real dependiente de varias variables reales

Se define una función real de n variables reales como una aplicación $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perteneciente al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un único valor real y que pertenece a $\mathbb{R}$. El elemento $y \in \mathbb{R}$, que se escribe $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es la imagen de $\mathbf{x}$ por f y el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de la función f.

Esta función o **campo escalar** es una transformación de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sobre un eje f en $\mathbb{R}^1$.

Variables: Puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

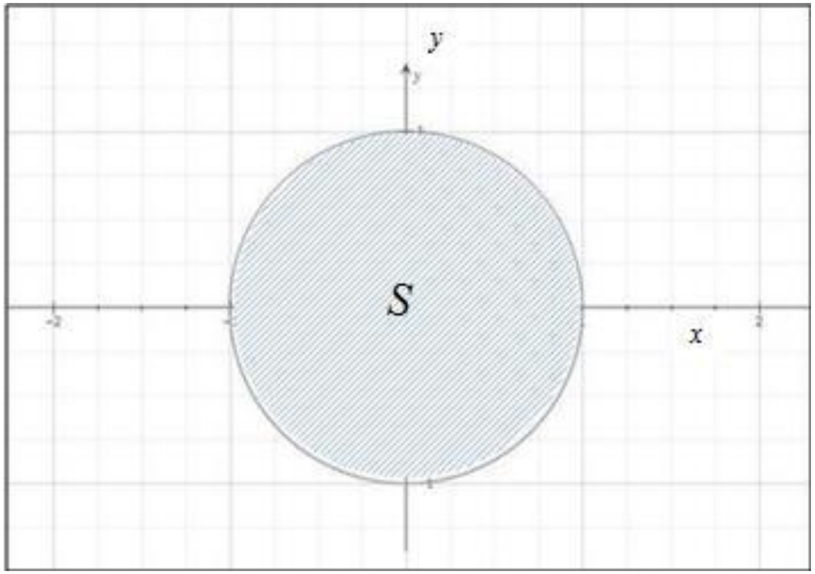
Distancia entre 2 puntos x: $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \equiv \sqrt{(x_1 - x^*_1)^2 + (x_2 - x^*_2)^2 + \cdots + (x_n - x^*_n)^2}$

Entorno de un punto perteneciente a $\mathbb{R}^n$: $N(\mathbf{x}^*; r)$ conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ más cercanos a $\mathbf{x}^*$ que r, es decir tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < r$.

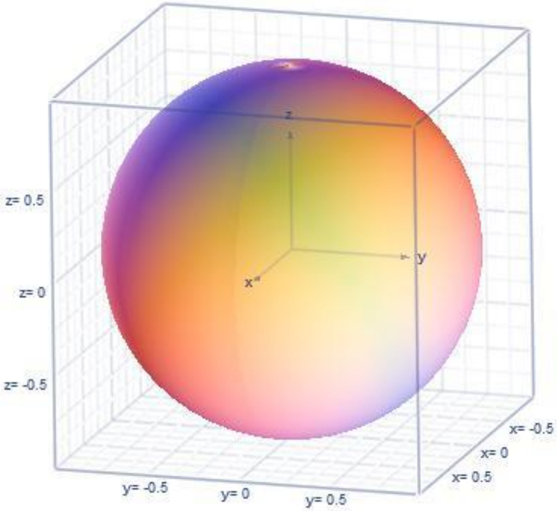
Dominio e imagen de un campo escalar

Campo escalar: $z(x,y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

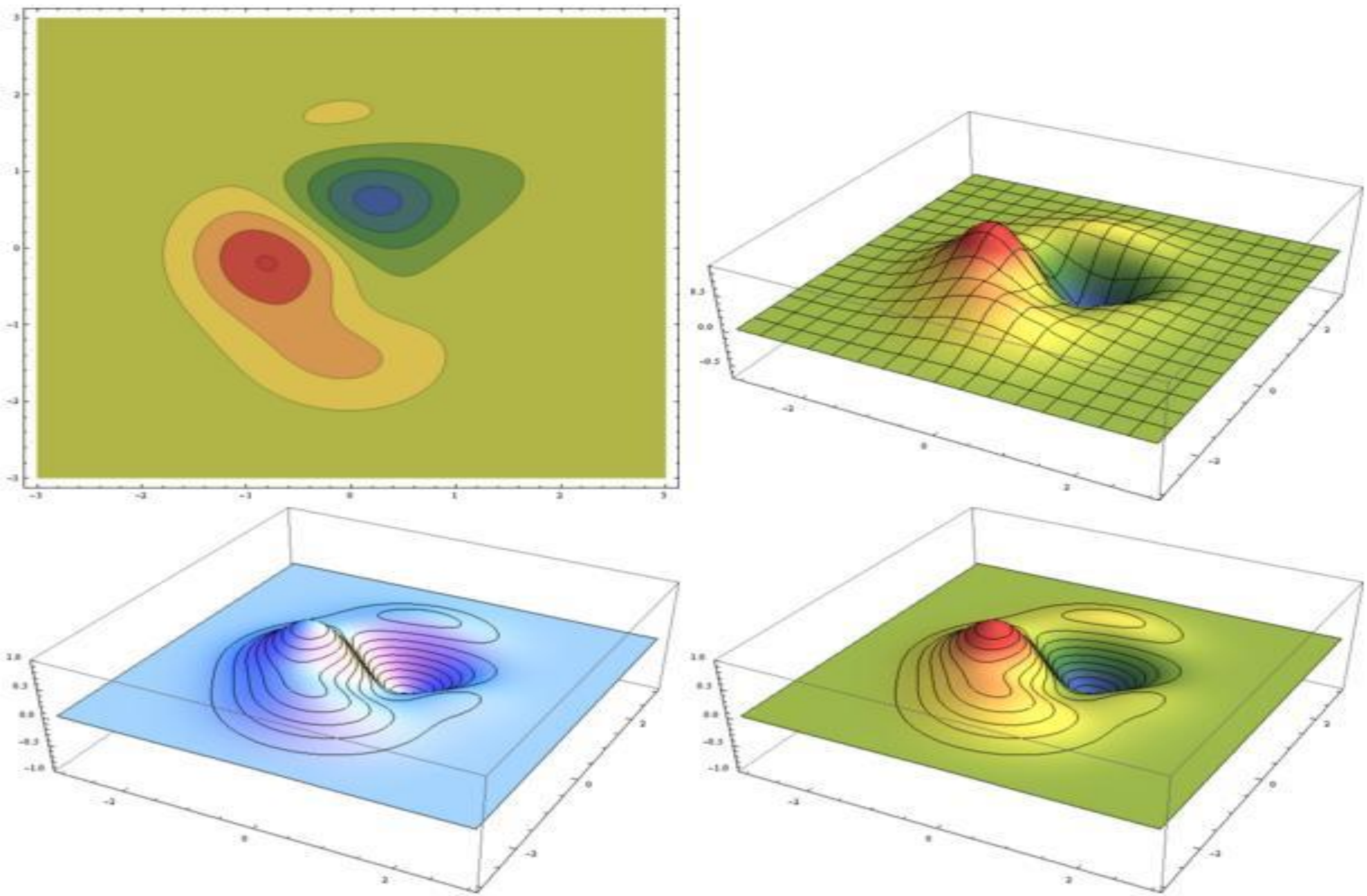
Definido para el conjunto de puntos $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}$



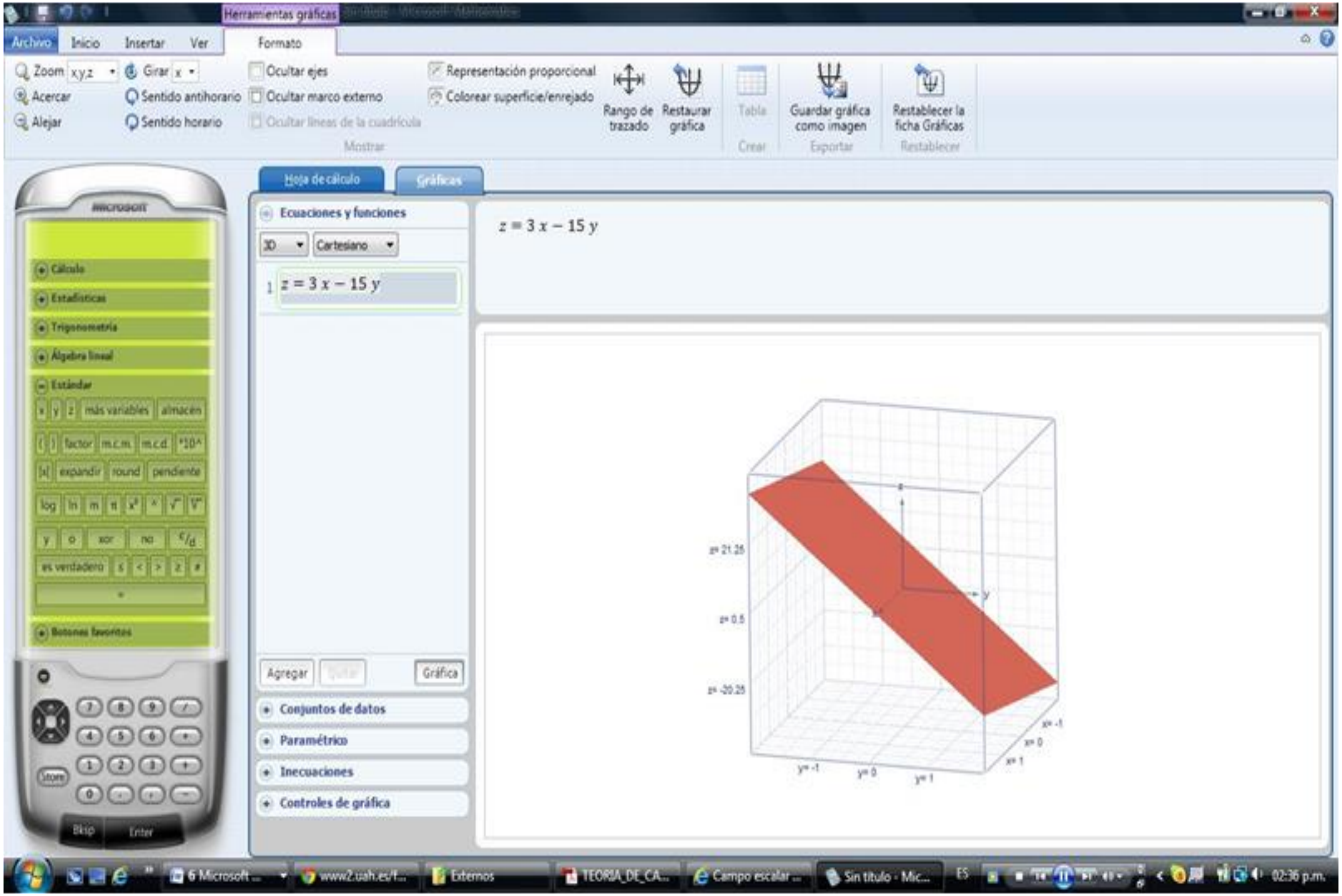
$\rightarrow$



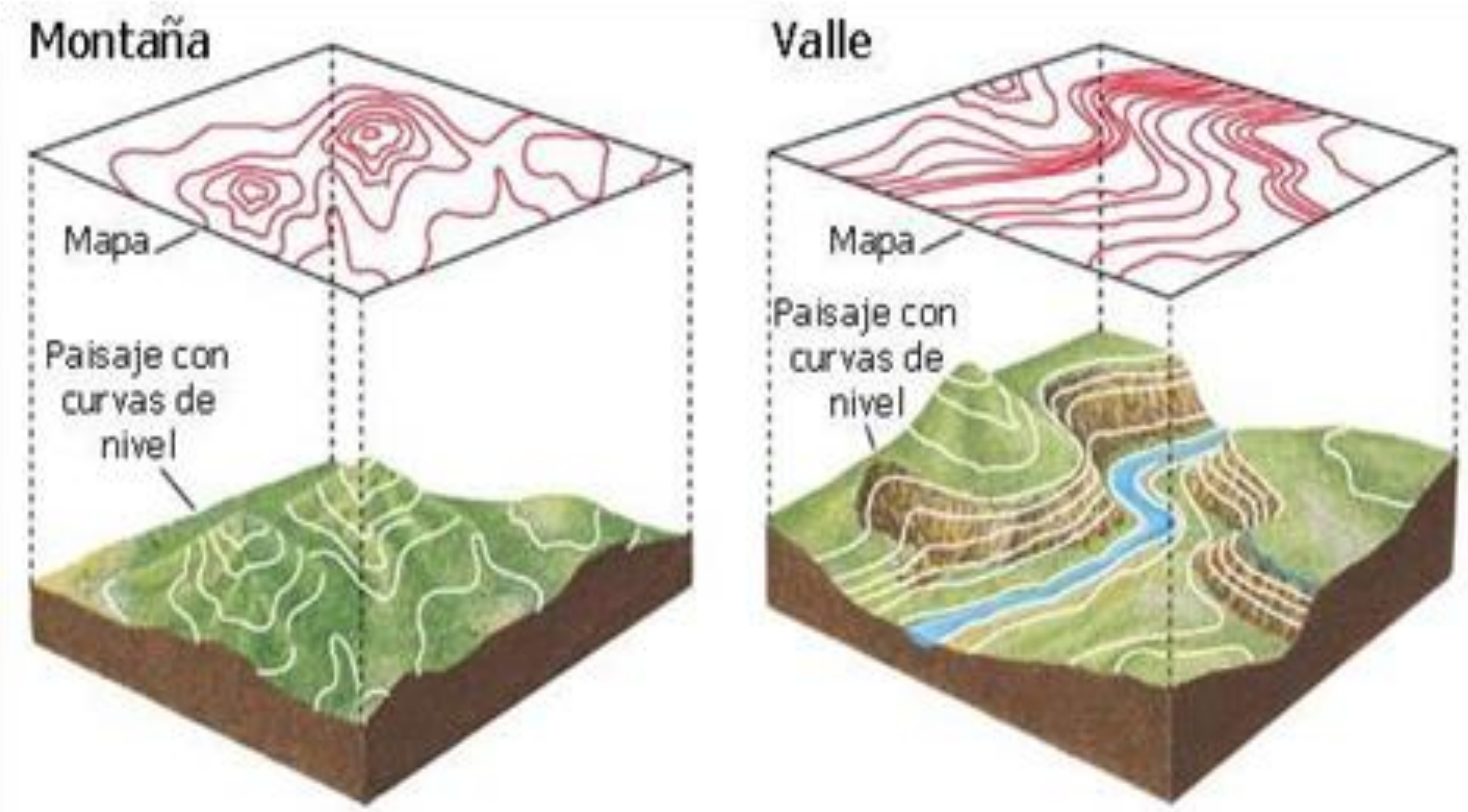
Representaciones de un campo escalar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Microsoft Mathematics



Curvas de Nivel



Límites y continuidad

Sea la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Se dice que $f(\mathbf{x})$ tiene un **límite** L cuando $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiende a $\mathbf{x}^{\bullet} = x^{\bullet}_1, x^{\bullet}_2, \ldots, x^{\bullet}_n$, y se escribe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{\bullet}} f(\mathbf{x}) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}^{\bullet}) > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\bullet}| < \delta$. Es decir, $f(\mathbf{x})$ se puede acercar arbitrariamente a L haciendo $\mathbf{x}$ suficientemente cercana a $\mathbf{x}^{\bullet}$

Sea la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$, se dice que $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}^{\bullet}$ si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^{\bullet}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{\bullet})$

Para el caso de funciones de dos variables se tiene que:

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) \wedge \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables

Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables reales independientes, x e y, definida en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Si se mantiene y constante, es decir $y = y_0$, entonces $f(x,y) = f(x,y_0)$ depende sólo de x.

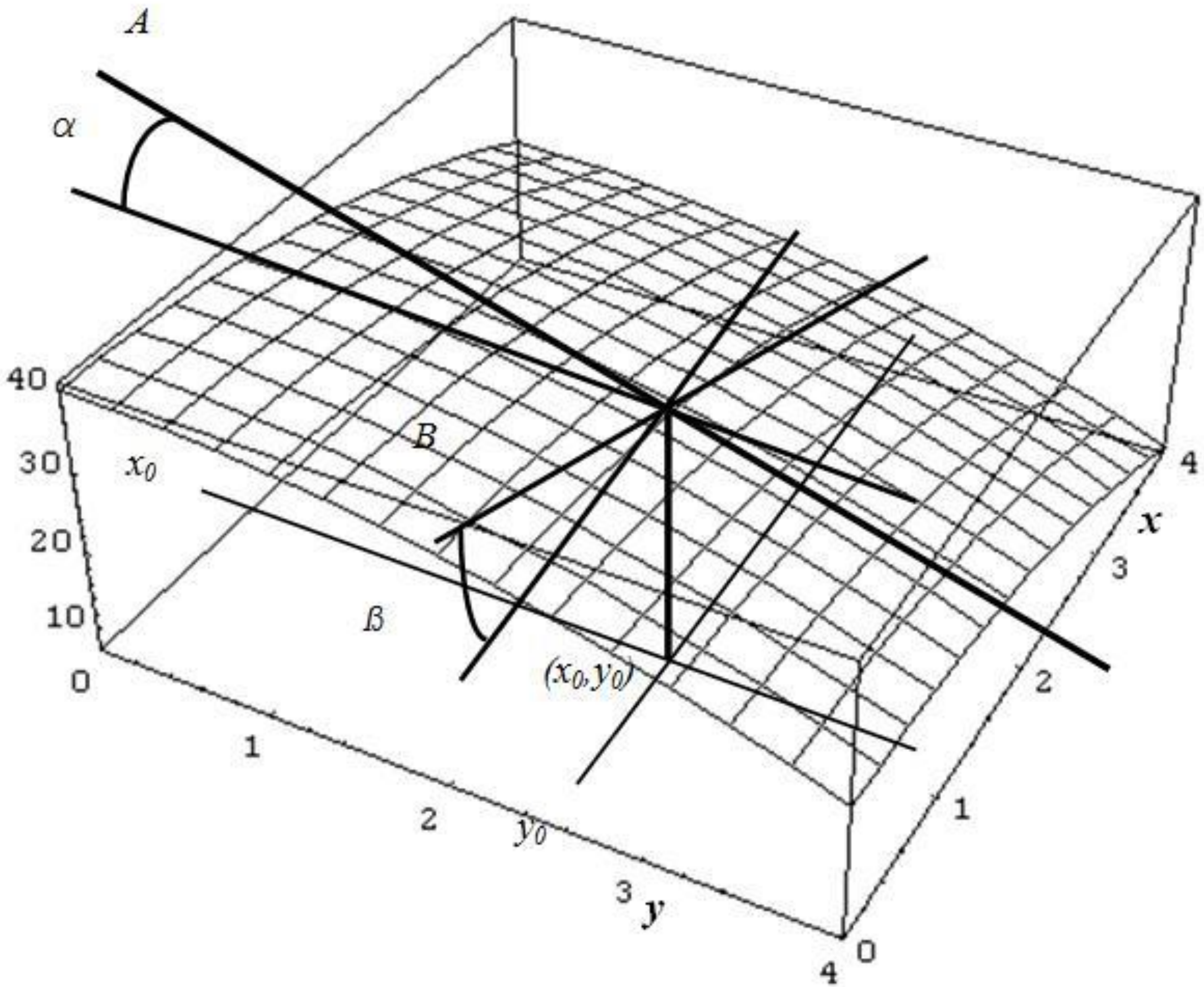
Si existe la derivada de $f(x,y_0)$ respecto de x para un valor $x = x_0$, entonces el valor de esta derivada se denomina derivada parcial de $f(x,y)$ respecto de x en el punto (x_0, y_0) y la notación que se emplea generalmente es $\partial f / \partial x$ o bien f_x. Se tiene, por definición de derivada,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x , y_0) - f(x_0 , y_0)}{\Delta x}$$

En forma similar se define la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto de y ; ahora se mantiene x constante, es decir igual a x_0, y derivando $f(x_0, y)$ respecto de y. Entonces

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 , y_0 + \Delta x) - f(x_0 , y_0)}{\Delta y}$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables



Derivadas Parciales sucesivas

Para un campo escalar dependiente de dos variables, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se llaman derivadas parciales primeras, o derivadas parciales de primer orden. Si estas funciones de (x,y) son derivadas una vez más, se obtienen las cuatro derivadas parciales segundas o derivadas parciales de segundo orden. La notación utilizada es

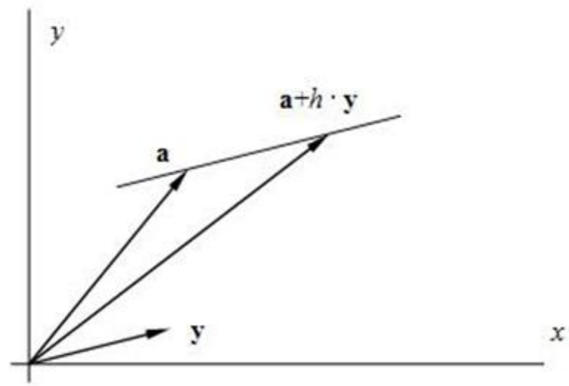
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yy}$$

Se puede demostrar que si todas las derivadas involucradas son funciones continuas, entonces las dos *derivadas parciales cruzadas* son iguales, de manera que no es problema el orden de derivación, o sea que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

Concepto de Derivada Direccional



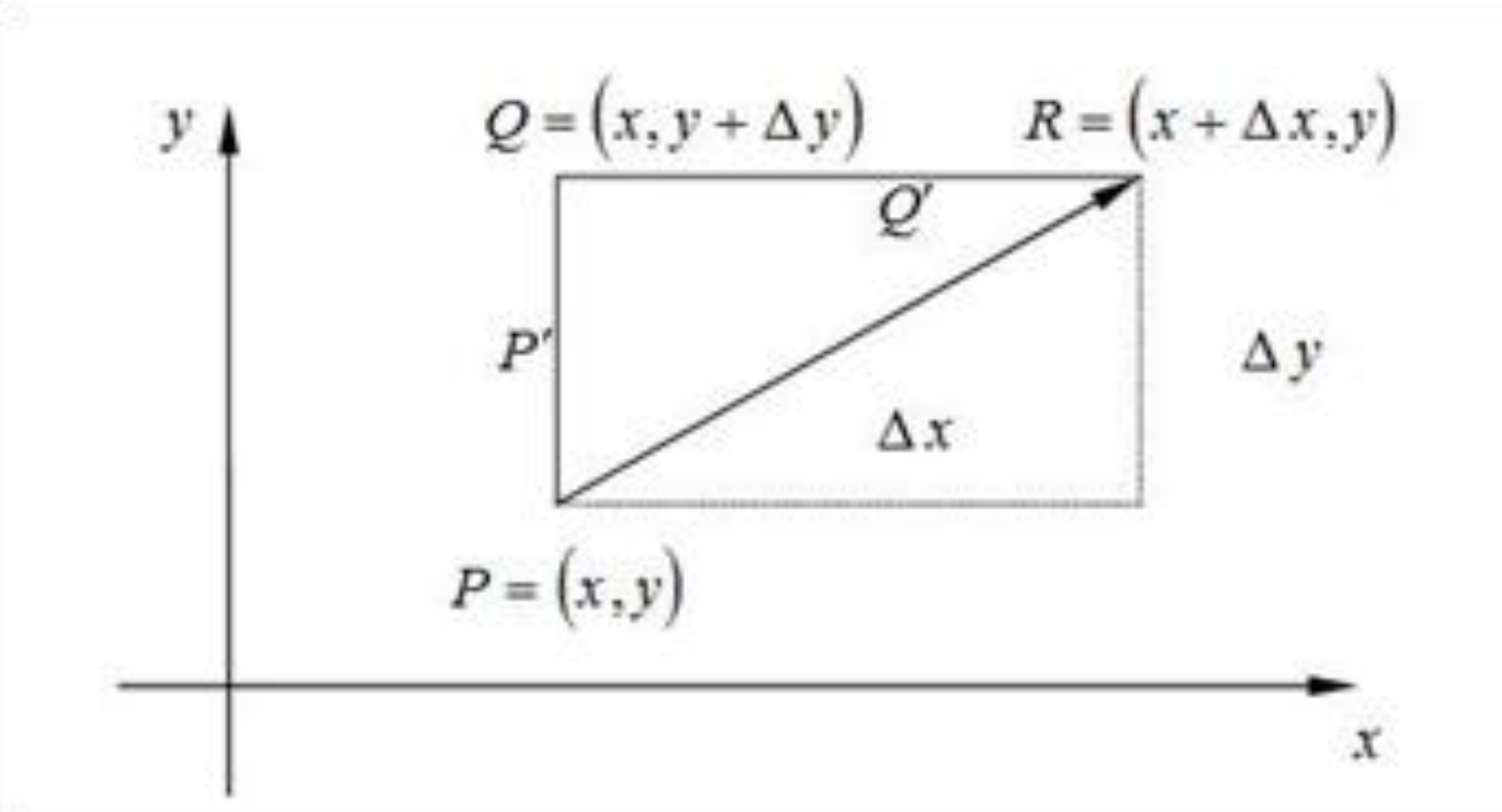
Dado un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{a}$ un punto interior a S e $\mathbf{y}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. La *derivada* de f en $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$ se representa con el símbolo $f'(\mathbf{a}\,;\mathbf{y})$ y se define

$$f'(\mathbf{a}\,;\mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \cdot \mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h}$$ cuando este límite existe.

En el caso de que $\mathbb{R}^n$ sea $\mathbb{R}^2$, la expresión anterior se puede reescribir teniendo en cuenta que las variables son x, y, la distancia $h = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, las componentes del vector $\mathbf{y}$, unitario, son sus cosenos directores, $\cos\alpha \wedge \operatorname{sen}\alpha$, las componentes de $\mathbf{a}$ son $\mathbf{a} = (a, b)$

$$f'((a,b);(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)) = \lim_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0} \frac{f((a + x\cos\alpha\,,\, b + y\operatorname{sen}\alpha)) - f(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

Diferencial de una función de dos variables



Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares