



Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería



Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares

Función real dependiente de varias variables reales

Se define una función real de n variables reales como una aplicación $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ perteneciente al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un único valor real y que pertenece a \mathbb{R} . El elemento $y \in \mathbb{R}$, que se escribe $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es la imagen de \mathbf{x} por f y el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de la función f .

Esta función o **campo escalar** es una transformación de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sobre un eje f en \mathbb{R}^1 .

Variables: Puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

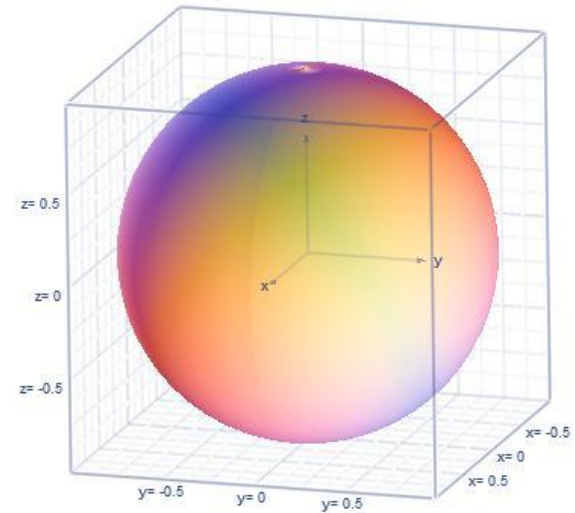
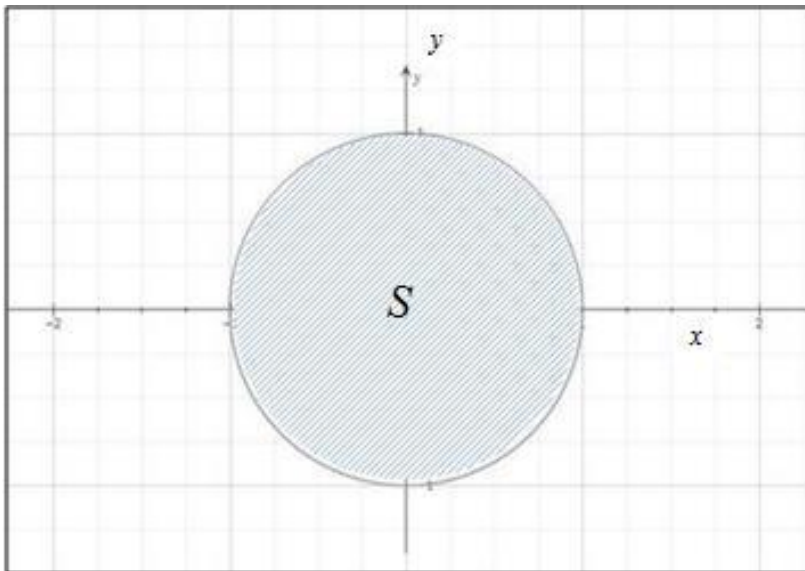
Distancia entre 2 puntos \mathbf{x} : $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \equiv \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$

Entorno de un punto perteneciente a \mathbb{R}^n : $N(\mathbf{x}^*; r)$ conjunto de todos los puntos \mathbf{x} más cercanos a \mathbf{x}^* que r , es decir tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < r$.

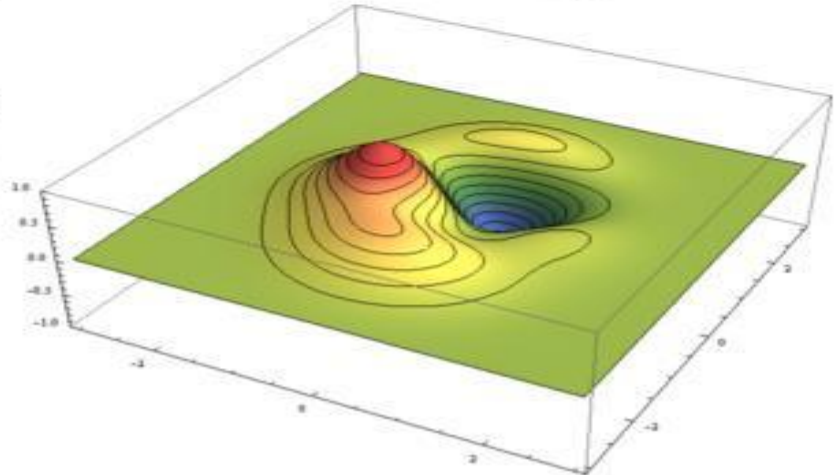
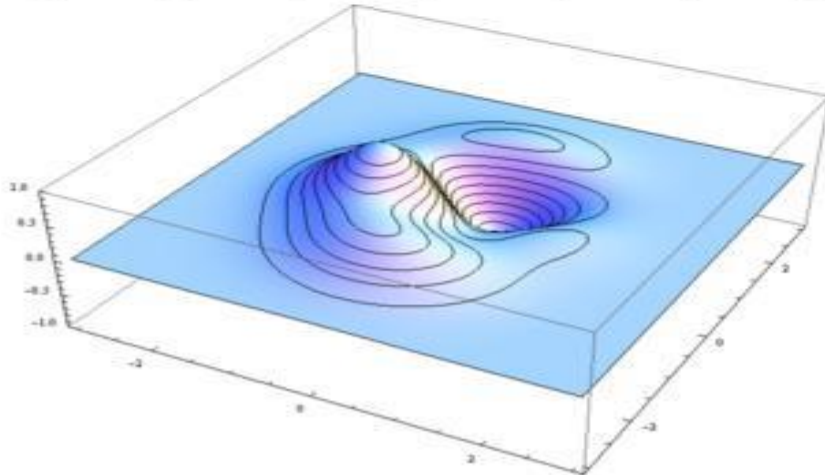
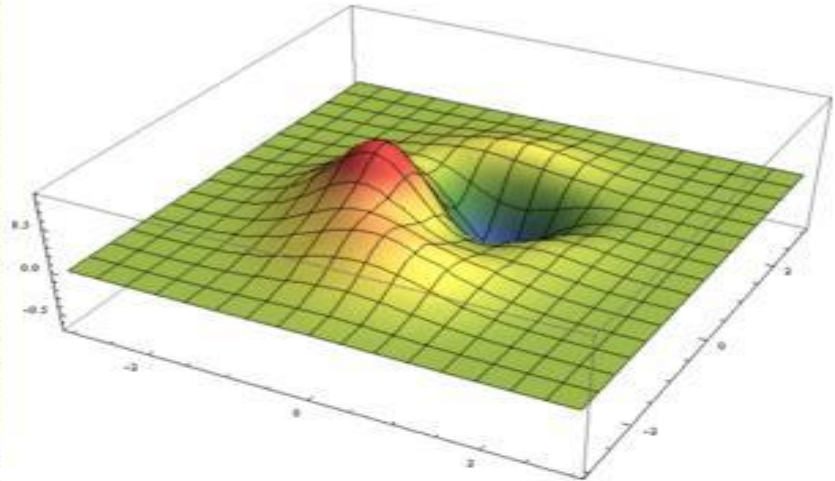
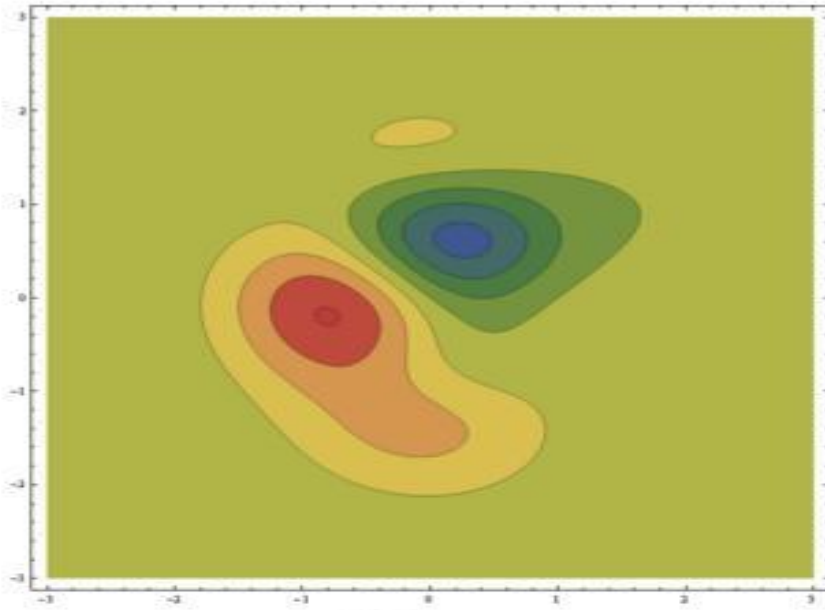
Dominio e imagen de un campo escalar

Campo escalar: $z(x, y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

Definido para el conjunto de puntos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$



Representaciones de un campo escalar $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Microsoft Mathematics

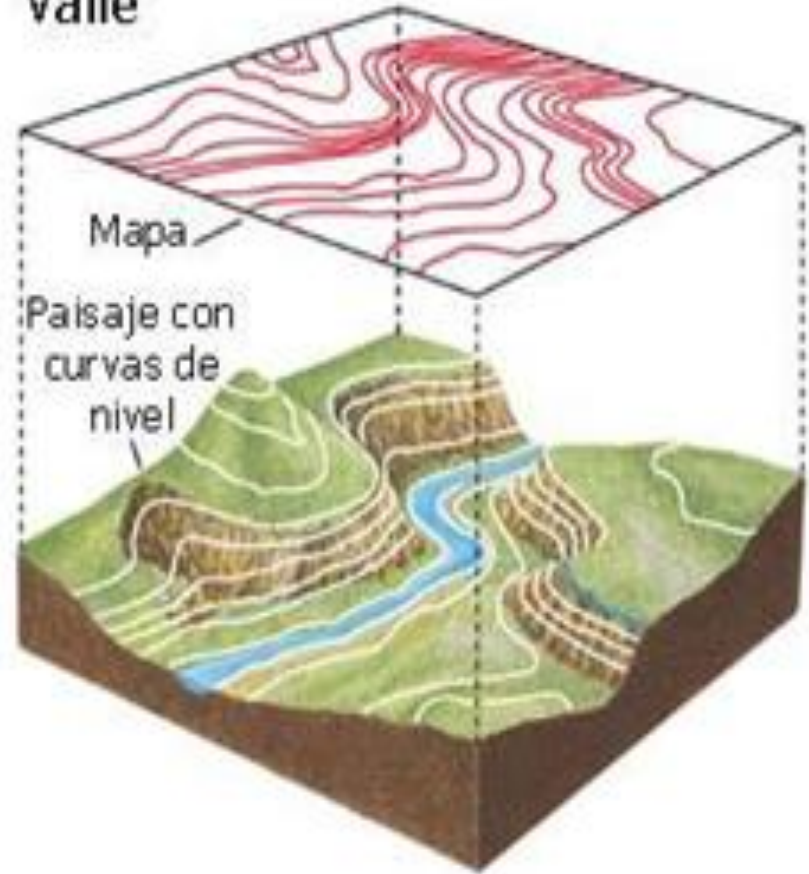
The screenshot displays the Microsoft Mathematics application interface. The top menu bar includes 'Archivo', 'Inicio', 'Insertar', 'Ver', and 'Formato'. The 'Formato' ribbon contains various tools for graph manipulation, such as 'Zoom', 'Girar', 'Ocultar ejes', 'Representación proporcional', 'Acercar', 'Sentido antihorario', 'Ocultar marco externo', 'Colorear superficie/enrejado', 'Alejar', 'Sentido horario', 'Ocultar líneas de la cuadrícula', 'Rango de trazado', 'Restaurar gráfica', 'Tabla', 'Guardar gráfica como imagen', and 'Restablecer la ficha Gráficas'. A vertical toolbar on the left side of the main window lists categories like 'Cálculo', 'Estadísticas', 'Trigonometría', 'Álgebra lineal', and 'Estándar', along with a calculator keypad. The main workspace is divided into two panes: 'Hoja de cálculo' and 'Gráficas'. The 'Gráficas' pane shows the equation $z = 3x - 15y$ and a 3D plot of this plane. The plot is a red rectangular surface within a 3D coordinate system. The vertical z-axis is labeled with values $z = 21.25$, $z = 0.5$, and $z = -20.25$. The horizontal axes are labeled with $x = -1$, $x = 0$, and $x = 1$, and $y = -1$, $y = 0$, and $y = 1$. Below the plot, there are buttons for 'Agregar', 'Quitar', and 'Gráfica', and a list of options: 'Conjuntos de datos', 'Paramétrico', 'Inecuaciones', and 'Controles de gráfica'. The Windows taskbar at the bottom shows several open applications, including 'Microsoft...', 'www2.uah.es/...', 'Externos', 'TEORIA DE CA...', 'Campo escalar...', and 'Sin título - Mic...', along with the system clock showing 02:36 p.m.

Curvas de Nivel

Montaña



Valle



Límites y continuidad

Sea la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Se dice que $f(\mathbf{x})$ tiene un límite L cuando $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ tiende a $\mathbf{x}^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, y se escribe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ (no importa cuán pequeño) existe un correspondiente $\delta(\varepsilon, \mathbf{x}^*) > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta$. Es decir, $f(\mathbf{x})$ se puede acercar arbitrariamente a L haciendo \mathbf{x} suficientemente cercana a \mathbf{x}^* .

Sea la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$, se dice que $f(\mathbf{x})$ es continua en \mathbf{x}^* si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$.

Para el caso de funciones de dos variables se tiene que:

$$\text{Si } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \wedge \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right]$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables

Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables reales independientes, x e y , definida en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Si se mantiene y constante, es decir $y = y_0$, entonces $f(x,y) = f(x,y_0)$ depende sólo de x .

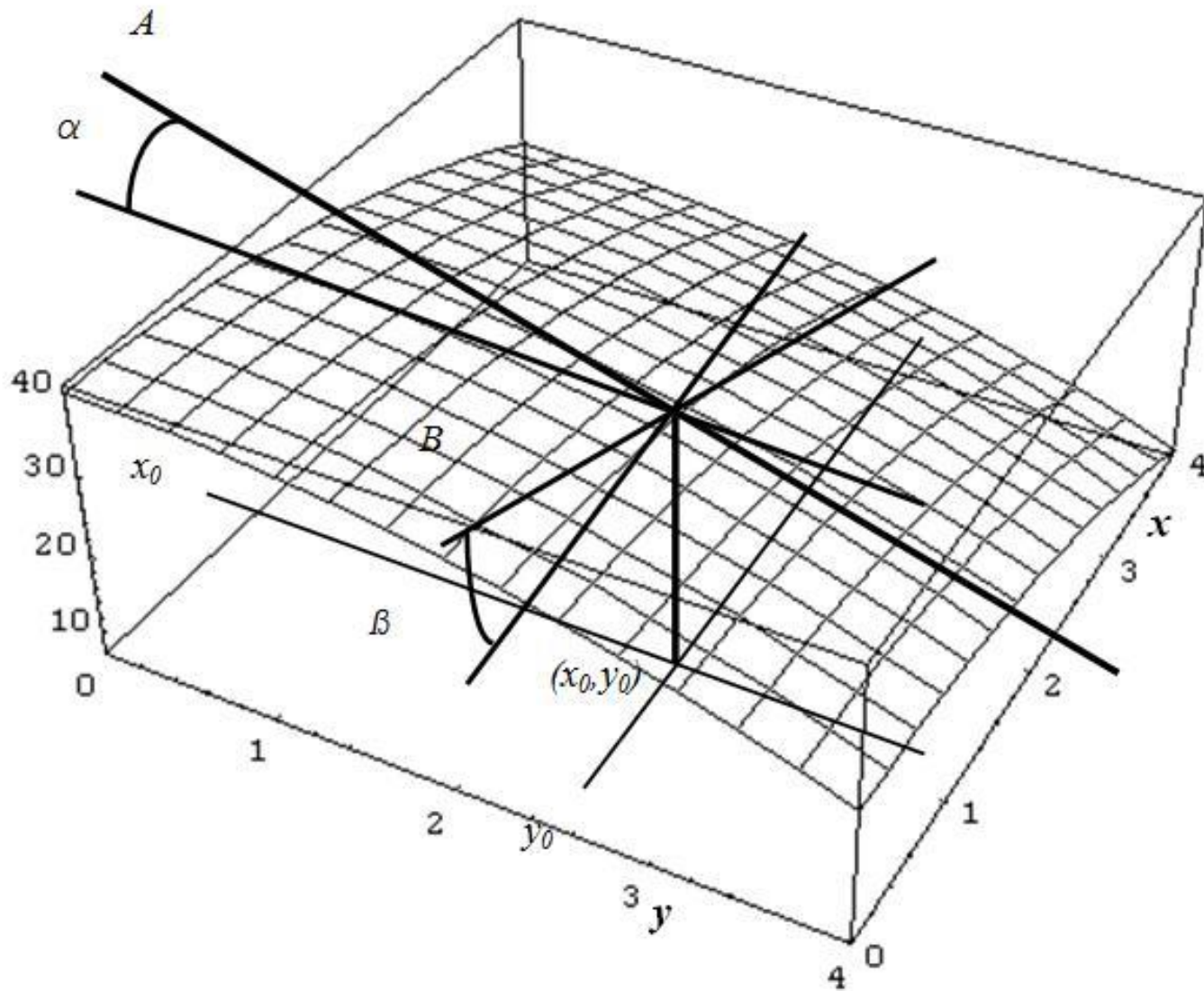
Si existe la derivada de $f(x,y_0)$ respecto de x para un valor $x = x_0$, entonces el valor de esta derivada se denomina derivada parcial de $f(x,y)$ respecto de x en el punto (x_0, y_0) y la notación que se emplea generalmente es $\partial f / \partial x$ o bien f_x . Se tiene, por definición de derivada,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

En forma similar se define la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto de y ; ahora se mantiene x constante, es decir igual a x_0 , y derivando $f(x_0, y)$ respecto de y . Entonces

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Derivadas Parciales de Funciones Reales de dos variables



Derivadas Parciales sucesivas

Para un campo escalar dependiente de dos variables, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se llaman derivadas parciales primeras, o derivadas parciales de primer orden. Si estas funciones de (x,y) son derivadas una vez más, se obtienen las cuatro derivadas parciales segundas o derivadas parciales de segundo orden. La notación utilizada es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

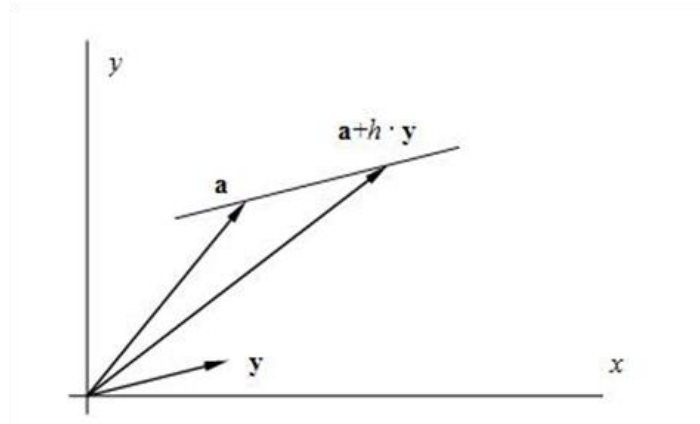
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

Se puede demostrar que si todas las derivadas involucradas son funciones continuas, entonces las dos *derivadas parciales cruzadas* son iguales, de manera que no es problema el orden de derivación, o sea que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Concepto de Derivada Direccional



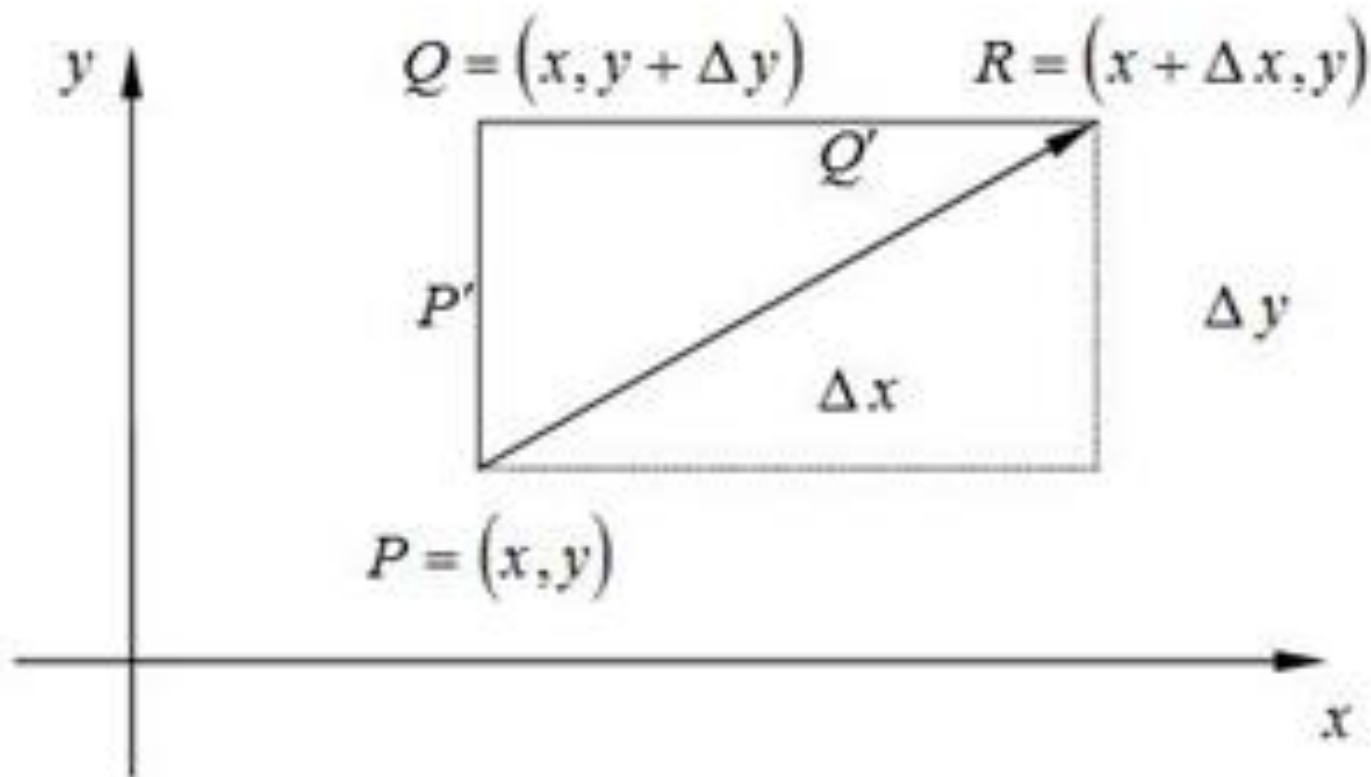
Dado un campo escalar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sean \mathbf{a} un punto interior a S e \mathbf{y} un vector unitario en \mathbb{R}^n . La *derivada* de f en \mathbf{a} en la *dirección* de \mathbf{y} se representa con el símbolo $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ y se define

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \cdot \mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h} \text{ cuando este límite existe.}$$

En el caso de que \mathbb{R}^n sea \mathbb{R}^2 , la expresión anterior se puede reescribir teniendo en cuenta que las variables son x, y , la distancia $h = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, las componentes del vector \mathbf{y} , unitario, son sus cosenos directores, $\cos \alpha \wedge \sin \alpha$, las componentes de \mathbf{a} son $\mathbf{a} = (a, b)$

$$f'((a, b); (\cos \alpha, \sin \alpha)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a + x \cos \alpha, b + y \sin \alpha)) - f(a, b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

Diferencial de una función de dos variables





Análisis Matemático II

Facultad de Ingeniería



Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 5

Cálculo en campos escalares