Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 3

Otras herramientas para la resolución de EDO

Autor: Gustavo Lores

Soluciones en series de potencias para E.D.O. lineales

En los Temas 1 y 2 hemos aprendido a resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes variables y de segundo orden con coeficientes constantes.

En las aplicaciones se puede observar que las ecuaciones lineales con coeficientes variables de segundo orden o de orden superior tienen la misma importancia que las de coeficientes constantes y que ecuaciones sencillas de segundo orden, como por ejemplo $y'' + xy = 0$, no tienen soluciones expresables en términos de funciones elementales.

Por esta razón vamos a dedicarnos a la búsqueda de soluciones linealmente independientes que vienen representadas por lo que se denominan series de potencias.

Series de funciones

Sea $u_1, u_2, u_3, \ldots$ una sucesión infinita de funciones reales de una variable real x

El símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ recibe el nombre de serie de funciones.

Teorema: Suma de una serie uniformemente convergente
Si cada término de una serie de funciones uniformemente convergente es una función continua de x, entonces la suma de la serie es una función continua de x.

Teorema: Integral de una serie de funciones uniformemente convergente
Dada una serie de funciones continuas que converge uniformemente a $S(x)$ en (a,b), la serie que resulta de integrar término a término la serie dada converge a la integral de la suma de la serie dada, siempre que los límites de integración estén contenidos en el intervalo de convergencia (a,b).

Teorema: Derivada de una serie de funciones uniformemente convergente
Dada una serie de funciones continuas que converge uniformemente a $S(x)$ en (a,b), la serie que resulta de derivar con respecto a término a término la serie dada converge a la derivada con respecto a x de la suma de la serie dada.

Series de potencias

Son un tipo particular de series de funciones que toman la forma

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots$$

en la cual los coeficientes a_i son independientes de x.

Teorema: Convergencia de series de potencias

Si la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ es tal que $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \right) = r$ la serie converge en el intervalo $-r < x < r$ y diverge fuera de ese intervalo.

La serie puede ser o no ser convergente en los extremos del intervalo.

Para demostrarlo se aplica el criterio del cociente a la serie de términos positivos asociada resultando que la serie es convergente si $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{|a_n| \cdot |x|}{|a_{n-1}|} \right) < 1$ y divergente si dicho límite es mayor que 1.

Por lo tanto la serie será convergente para aquellos valores de x tales que $|x| < \lim_{n \to \infty} \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \right) = r$

O sea que la serie será convergente en el intervalo $(-r, r)$, llamado **Intervalo de Convergencia**. El número r recibe el nombre de **Radio de Convergencia**.

Propiedades de las Series de Potencias

Teorema: Radio de Convergencia

Si $r > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias dicha serie converge absoluta y uniformemente para todo valor de x perteneciente a cualquier intervalo $a \leq x \leq b$ que sea interior al intervalo $(-r, r)$.

Teorema: Continuidad de la suma de la serie

Una serie de potencias define una función continua para todos los valores de x pertenecientes a cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ que sea interior al intervalo de convergencia de dicha serie.

Teorema: Serie de potencias derivada e integrada

Si $r > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias el radio de convergencia de las series que se obtienen respectivamente derivando e integrando término a término la serie dada es también r.

Tienen la forma $\sum_{1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ y $\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ respectivamente.

Series de potencias de $x-h$

Se pueden plantear series de potencias en $x-h$ como particular de cuando $h=0$.

Tienen la forma

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (x-h)^n = a_0 + a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \cdots + a_n(x-h)^n + \cdots$$

y son válidas las mismas consideraciones respecto de la convergencia, teniendo en cuenta que en este caso el radio de convergencia está relacionado con x, h y a_n por la siguiente expresión

$$|x-h| < n \xrightarrow{lim} \infty \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \right) = r$$

Solución de EDOs con Series de potencias

2. Solución en serie de ecuaciones diferenciales

2.1. Función analítica

Una función real $f(x)$ es denominada analítica en un punto $x = x_0$ si puede ser representada mediante una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia $R > 0$.

Teorema 1: Teorema de existencia de las soluciones por series

Sea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = r(x) \qquad [1]$$

en la que $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ y $r(x)$ son funciones cualesquiera de la variable independiente x.

Si estas funciones son analíticas en $x = x_0$, entonces cada solución de [1] puede ser representada mediante una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia $R > 0$.

3. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales por series

El método de series de potencias es un método estándar básico para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Produce una solución en la forma de una serie de potencias. Dicha serie se puede emplear para computar valores de las soluciones, para explorar sus propiedades y para derivar otras clases de representación de las soluciones.

El método de recurrencia

La secuencia que propone el método de recurrencia para resolver ecuaciones diferenciales por series de potencias, por ejemplo para una ecuación dada $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ es la siguiente:

3.1.a. Primer paso

Representar $p(x) \wedge q(x)$ mediante series de potencias, en potencias de x o de $(x - x_0)$, de acuerdo a como se necesite expresar la solución. Frecuentemente $p(x) \wedge q(x)$ son polinomios, y no es necesario llevar a cabo este paso.

3.1.b. Segundo paso

Proponer una solución de la ecuación diferencial en forma de serie de potencias, con coeficientes indeterminados $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ e insertar esta serie en la serie dada siguiendo las reglas de la diferenciación término a término.

3.1.c. Tercer paso

Agrupar en la serie resultante los coeficientes que correspondan a iguales potencias de x. Este paso provee las relaciones a partir de las cuales se pueden determinar los coeficientes desconocidos de la serie propuesta como solución.

3.1.d. Consideraciones para la aplicación de este método

Para aplicar este método, se debe tener en cuenta durante las operaciones algebraicas:

- ✓ la variable x debe estar en todos los sumandos de igual índice con el mismo exponente,
- ✓ los rangos de variación del índice n que caracteriza a cada término deben ser iguales.

La fórmula de Taylor

Sea una función $f(x)$ tal que sea continua en $x=a$, admita infinitas derivadas continuas en un intervalo $(a-r, a+r)$. Proponiendo su desarrollo en series de potencias de $(x-a)$ se tiene que la función junto con sus derivadas, tomarán necesariamente las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \\ f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots \\ f''(x) = a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots = \cdots + \cdots + \cdots \end{cases}$$

y haciendo en ellas $x=a$, resulta

$$\begin{cases} f(a) = a_0 \\ f'(a) = 1! \cdot a_1 \\ f''(a) = 2! \cdot a_2 \\ \cdots = \cdots \\ f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n \end{cases}$$

Entonces los coeficientes del desarrollo se pueden expresar

$$\left\{ a_0 = f(a) \,;\, a_1 = \frac{f'(a)}{1!} \,;\, a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \,;\, \cdots = \cdots \,;\, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \,;\, \cdots = \cdots \right.$$

Si una función se puede desarrollar en potencias de $(x-a)$, este desarrollo es único y vale $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$, que se llama desarrollo indefinido de Taylor de la función $f(x)$ alrededor del punto $x=a$. Cuando se hace $a=0$, la serie toma la forma especial $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots$ que se llama desarrollo en serie de Maclaurin.

Resolución de EDOs aplicando la Fórmula de Taylor

Existe únicamente un desarrollo en serie de potencias de $(x-a)$, (o de potencias de x) para una función. Por consiguiente, el desarrollo obtenido por cualquier otro procedimiento coincide con el desarrollo de Taylor (o de Maclaurin).

Esta última propiedad permite deducir que si de alguna manera se pueden determinar los coeficientes de la serie de potencias queda unívocamente definida una función.

Entonces, cuando se aplica el desarrollo en series para resolver ecuaciones diferenciales la serie que se genera como su solución propuesta corresponde a una única función.

Consideraciones para la aplicación de este método

Para poder aplicar este método es necesario que se trate de un problema con valores iniciales, que la función desconocida sea sucesivamente diferenciable n veces, con $n \to \infty$ y que sea suficiente con un desarrollo parcial de la serie infinita, ya que en general no se podrá encontrar una ley de formación para los coeficientes sucesivos.

Resolución de EDOs aplicando Transformada de Laplace

4. Solución de EDO empleando Transformadas de Laplace

Este método presenta las siguientes ventajas: a) transforma la ecuación diferencial dada en una ecuación algebraica; b) las condiciones iniciales se incorporan directamente al problema algebraico y c) el uso de tablas de transformadas de Laplace facilita la resolución de los problemas.

4.1. Definición y ejemplos de la transformada de Laplace

Sea $f(t)$ con $t > 0$, y s un parámetro, la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como.

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad [25]$$

A los efectos de su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales en este curso, s será considerado real.

El símbolo $\mathscr{L}$ se llama operador de la transformada de Laplace. La integral impropia que aparece en la expresión [25] queda definida como

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)dt \qquad [26]$$

La transformada de Laplace existe si el límite existe, o sea, si la integral converge.

Resolución de EDOs aplicando Transformada de Laplace

4.6. Aplicación de las transformadas a la resolución de EDO

El procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales mediante el empleo de transformadas de Laplace se fundamenta en la propiedad que tiene la transformada de Laplace de las derivadas, al convertirlas en funciones algebraicas en las cuales la incógnita es precisamente la transformada de la función desconocida.

Por lo tanto, la transformada inversa de esta última permite conocer el valor de la solución de la ecuación diferencial, que como incorpora las condiciones iniciales, es una solución particular.

4.7.d. Uso de Tablas de Transformadas

Para hallar $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, conociendo $F(s)$ sólo se necesita mirar en la tabla de transformadas de Laplace a qué función $f(t)$ corresponde $F(s)$.

En ciertos casos, la transformada inversa no se encuentra directamente en la tabla, pero se puede descomponer $F(s)$ en dos o más funciones que sí se pueden antitransformar utilizándola. La Tabla 5 muestra algunas funciones y sus transformadas de Laplace.

Resolución de EDOs aplicando Transformada de Laplace

	Función $f(t)$	Transformada $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$	Observaciones
1	1	$\dfrac{1}{s}$	$s>0$
2	t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s>0$
3	t^n, con $n=1,2,3,\dots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
4	t^n, con $n>-1$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	$s>0$
5	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s>a$
6	$\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
7	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
8	$\operatorname{senh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$
9	$\cosh\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$
10	$e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$

Análisis Matemático II
Presentaciones en el Aula

TEMA 3

Otras herramientas para la resolución de EDO