Tema 3. Otras herramientas para la resolución de EDO

1. Conceptos previos y objetivo del capítulo

En los capítulos anteriores se desarrollaron métodos específicos para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

El alcance de estos métodos queda limitado a determinados casos particulares de EDO de primer y segundo orden.

En este capítulo se verán dos procedimientos genéricos que permiten ampliar significativamente el campo de las ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas analíticamente.

Uno de ellos consiste en proponer como función desconocida un desarrollo en serie de potencias y determinar luego sus coeficientes. Se presentarán dos métodos para obtenerlos.

En el otro se trata de convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, empleando la herramienta que se conoce con transformada de Laplace.

En ambos casos, el objetivo es mostrar que existen recursos del cálculo adicionales que se pueden emplear para resolver ecuaciones diferenciales de formas más complicadas que las elementales.

También se puede abordar su solución desde una perspectiva experimental, mediante la aplicación de recursos simbólicos del sistema MATLAB® o de otro software similar.

2. Solución en serie de ecuaciones diferenciales

2.1. Función analítica

Una función real $f(x)$ es denominada analítica en un punto $x = x_0$ si puede ser representada mediante una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia $R > 0$.

Teorema 1: Teorema de existencia de las soluciones por series

Sea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = r(x) \qquad [1]$$

en la que $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ y $r(x)$ son funciones cualesquiera de la variable independiente x.

Si estas funciones son analíticas en $x = x_0$, entonces cada solución de [1] puede ser representada mediante una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia $R > 0$.

3. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales por series

El método de series de potencias es un método estándar básico para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Produce una solución en la forma de una serie de potencias. Dicha serie se puede emplear para computar valores de las soluciones, para explorar sus propiedades y para derivar otras clases de representación de las soluciones.

3.1. El método de recurrencia

La secuencia que propone el método de recurrencia para resolver ecuaciones diferenciales por series de potencias, por ejemplo para una ecuación dada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad [2]$$

es la siguiente:

3.1.a. Primer paso

Representar $p(x) \wedge q(x)$ mediante series de potencias, en potencias de x o de $\left(x - x_0\right)$, de acuerdo a como se necesite expresar la solución. Frecuentemente $p(x) \wedge q(x)$ son polinomios, y no es necesario llevar a cabo este paso.

3.1.b. Segundo paso

Proponer una solución de la ecuación diferencial en forma de serie de potencias, con coeficientes indeterminados

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad [3]$$

e insertar esta serie en [2] siguiendo las reglas de la diferenciación término a término.

3.1.c. Tercer paso

Agrupar en la serie resultante los coeficientes que correspondan a iguales potencias de x. Este paso provee las relaciones a partir de las cuales se pueden determinar los coeficientes desconocidos de la serie propuesta como solución.

3.1.d. Consideraciones para la aplicación de este método

Para aplicar este método, se debe tener en cuenta durante las operaciones algebraicas:

- ✓ la variable x debe estar en todos los sumandos de igual índice con el mismo exponente,
- ✓ los rangos de variación del índice n que caracteriza a cada término deben ser iguales.

Ejemplo 1:

Resolver

$$(1-x)\cdot y' = x^2 - y \qquad [4]$$

Resolución:

Primer paso:

No es necesario llevar a cabo este paso, ya que los coeficientes de la ecuación diferencial son polinomios.

Segundo paso:

Se propone como solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad [5]$$

resultando

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} + \cdots \qquad [6]$$

Reemplazando [5] y [6] en [4], queda:

$$(1-x)\cdot \sum_{1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} + \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = x^2 \qquad [7]$$

Tercer paso:

Operando algebraicamente, se tiene

$$\underbrace{\sum_{1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}}_{A} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty} n \cdot a_n x^n}_{B} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_n x^n}_{C} = x^2 \qquad [8]$$

y siguiendo las consideraciones para la aplicación del método, primero, la variable x debe estar en todos los sumandos de igual índice con el mismo exponente, por lo que se analiza cada término :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Indice de sumatoria en } A: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^0 \\ \text{Indice de sumatoria en } B: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^1 \\ \text{Indice de sumatoria en } C: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^2 \end{array}\right\} \qquad [9]$$

es necesario operar con la serie A para que se cumpla la primera consideración.

$$\underbrace{\sum_{1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1}}_{A} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \underbrace{\sum_{0}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1} x^n}_{A^*} \qquad [10]$$

resultando

$$\underbrace{\sum_{0}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1} x^n}_{A^*} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty} n\cdot a_n x^n}_{B} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_n x^n}_{C} = x^2 \qquad [11]$$

y ahora :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Indice de sumatoria en } A^*: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^1 \\ \text{Indice de sumatoria en } B: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^1 \\ \text{Indice de sumatoria en } C: n=1 \Rightarrow \text{exponente de } x: x^2 \end{array}\right\} \qquad [12]$$

Como segunda consideración, los rangos de variación del índice n que caracteriza a cada término deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango de } x \text{ en } A^* = 0 \to \infty \\ \text{rango de } x \text{ en } B = 1 \to \infty \\ \text{rango de } x \text{ en } C = 0 \to \infty \end{array}\right\} \qquad [13]$$

es necesario desglosar en las series $A^* \wedge C$ los términos de orden 0 :

$$\left.\begin{array}{l} A^* = a_1 + \sum_{1}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1} x^n \\ C = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n x^n \end{array}\right\} \qquad [14]$$

resultando

$$a_0 + a_1 + \sum_{1}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1} x^n - \sum_{1}^{\infty} n\cdot a_n x^n + \sum_{1}^{\infty} a_n x^n = x^2 \qquad [15]$$

y agrupando las tres series en una, se tiene

$$\begin{array}{l} (a_0 + a_1) + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+1)\cdot a_{n+1} - n\cdot a_n + a_n\right]\cdot x^n = x^2 \\ (a_0 + a_1) + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+1)\cdot a_{n+1} + (1-n)\cdot a_n\right]\cdot x^n = x^2 \end{array} \qquad [16]$$

igualando los términos de igual grado se pueden obtener, por recurrencia, los valores de los sucesivos a_n, que se ven en la Tabla 1

Tabla 1

Grado de x	**Igualdad**	**Término** a_{n+1}
0	$(a_0 + a_1) = 0$	$a_1 = -a_0$
1	$2a_2 = 0$	$a_2 = 0$
2	$3a_3 + a_2 = 1$	$a_3 = 1/3$
3	$4a_4 - 2a_3 = 0$	$a_4 = 1/6$
n	$(n+1)\cdot a_{n+1} + (1-n)\cdot a_n = 0$	$a_{n+1} = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot a_n$

La expresión que define a a_{n+1} se llama *fórmula de recurrencia* y permite analizar si existe o no una ley de formación para los coeficientes $n-$esimos de la serie solución.

En la Tabla 2 se muestra como se realiza la búsqueda para este caso:

Tabla 2

Coeficiente	Expresión	Valor
a_5	$(3/5)\cdot a_4$	$1/10$
a_6	$(4/6)\cdot a_5$	$1/15$
a_7	$(5/7)\cdot a_6$	$1/21$
a_8	$(6/8)\cdot a_7$	$1/28$
a_n		$\dfrac{2}{n\cdot(n-1)}\quad , \quad \forall\ n = 3, 4, 5, \ldots$

Finalmente, se expresa la solución de la forma

$$y(x) = a_0 - a_0 x + 0x^2 + \sum_{3}^{\infty} \frac{2}{n\cdot(n-1)}\cdot x^n$$

que se puede escribir

$$y(x) = a_0\cdot(1-x) + \sum_{3}^{\infty} \frac{2}{n\cdot(n-1)}\cdot x^n \qquad [17]$$

Esta solución en forma de serie de potencias, sólo podrá ser aplicada dentro de su intervalo de convergencia, para lo cual se determina r e I, resultando, para el ejemplo dado, $r = 1$, $I = [-1\ , 1]$.

3.2. Desarrollo de la solución en serie de Taylor

La idea de este método consiste en proponer una solución en serie de potencias de x aplicando la propiedad de unicidad del desarrollo de funciones en series de potencias, determinando los coeficientes de la serie a través de la evaluación de las sucesivas derivadas de la función desconocida.

Para comprender el sentido de la aplicación de este procedimiento es conveniente dar un repaso a los conceptos y propiedades elementales de las series de potencias.

3.2.a. Series de potencias. Conceptos generales

Las series de potencias son series de funciones que toman, en general las formas

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad [18]$$

que se denomina comúnmente serie de Maclaurin o serie de potencias de x, o la forma

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (x-h)^n = a_0 + a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \cdots + a_n(x-h)^n + \cdots$$

que se denomina serie de Taylor o serie de potencias de $x-h$

En cualquier caso los coeficientes a_i son números reales independientes de x.

3.2.b. Convergencia de las series de potencias

Si la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right) = r$, la serie converge en el intervalo $-r < x < r$ y diverge fuera de ese intervalo. La serie puede ser o no ser convergente en los extremos del intervalo. El número r recibe el nombre de Radio de Convergencia.

Para las series del tipo $\sum_0^{\infty} a_n (x-h)^n$ se define r de la misma manera. La serie converge en el intervalo $-r < x-h < r$ y diverge fuera de ese intervalo.

3.2.c. Propiedades de las series de potencias

Radio de Convergencia: Si $r > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias de x, dicha serie converge absoluta y uniformemente para todo valor de x perteneciente a cualquier intervalo $a \le x \le b$ que sea interior al intervalo $(-r, r)$.

Continuidad de la suma de la serie: Una serie de potencias de x define una función continua para todos los valores de x pertenecientes a cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ que sea interior al intervalo de convergencia de dicha serie.

Serie de potencias derivada e integrada: Si $r > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias de x, el radio de convergencia de las series que se obtienen respectivamente derivando e integrando término a término la serie dada es también r.

Derivaciones e integraciones sucesivas: Como las series obtenidas por la derivación o integración término a término de la serie dada son asimismo series de potencias, puede reiterarse el proceso anterior indefinidamente y las series de potencias resultantes serán series que convergerán en el mismo intervalo $(-r, r)$ y serán uniforme y absolutamente convergentes en todo intervalo interior al $(-r, r)$.

Serie de potencias nula: Si una serie de potencias de x se anula para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo que contiene el punto $x = 0$, se anulan los coeficientes a_i de cada una de las potencias de x.

3.2.d. Desarrollo de funciones en series de potencias

Fórmula de Taylor: Sea una función $f(x)$ tal que sea continua en $x = a$, admita infinitas derivadas continuas en un intervalo $(a-r, a+r)$. Proponiendo su desarrollo en series de potencias de $(x-a)$ se tiene que la función junto con sus derivadas, tomarán necesariamente las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \\ f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots \\ f''(x) = a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots = \cdots + \cdots + \cdots \end{cases} \text{ y haciendo en ellas } x = a \text{, resulta } \begin{cases} f(a) = a_0 \\ f'(a) = 1! \cdot a_1 \\ f''(a) = 2! \cdot a_2 \\ \cdots = \cdots \\ f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n \end{cases}$$

Entonces los coeficientes del desarrollo se pueden expresar

$$\begin{cases} a_0 = f(a) \\ a_1 = \dfrac{f'(a)}{1!} \\ a_2 = \dfrac{f''(a)}{2!} \\ \cdots = \cdots \\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ \cdots = \cdots \end{cases} \qquad [19]$$

Si una función se puede desarrollar en potencias de $(x-a)$, este desarrollo es único y vale

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad [20]$$

Se llama desarrollo indefinido de Taylor de la función $f(x)$ alrededor del punto $x = a$. Cuando se hace $a = 0$, la serie toma la forma especial

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots \qquad [21]$$

que se llama desarrollo en serie de Maclaurin.

La fórmula de Taylor también se expresa

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + T_n,$$

donde T_n es el Resto o Término Complementario de la serie y vale

$$T_n = \frac{f^{(n)}(a + \Theta x)}{n!}(x-a)^n, \text{ con } 0 < \Theta < 1. \qquad [22]$$

En el campo real, el desarrollo de una función en serie de Taylor, o de Maclaurin según corresponda, es válido para todo valor de x que, sustituido en el término complementario $T_n(x)$ cumpla con la condición $\lim_{n \to \infty} \left[T_n(x)\right] = 0$.

Unicidad del desarrollo: Existe únicamente un desarrollo en serie de potencias de $(x-a)$, (o de potencias de x) para una función. Por consiguiente, el desarrollo obtenido por cualquier otro procedimiento coincide con el desarrollo de Taylor (o de Maclaurin).

Esta última propiedad permite deducir que si de alguna manera se pueden determinar los coeficientes de la serie de potencias queda unívocamente definida una función.

Entonces, cuando se aplica el desarrollo en series para resolver ecuaciones diferenciales la serie que se genera como su solución propuesta corresponde a una única función.

3.2.d. Consideraciones para la aplicación de este método

Para poder aplicar este método es necesario que se trate de un problema con valores iniciales, que la función desconocida sea sucesivamente diferenciable n veces, con $n \to \infty$ y que sea suficiente con un desarrollo parcial de la serie infinita, ya que en general no se podrá encontrar una ley de formación para los coeficientes sucesivos.

Ejemplo 2:

Resolver $y'' + y \cdot \cos x = 0$ si $y(0) = 1 \wedge y'(0) = 0$ [22]

proponiendo una solución en forma de serie de potencias, desarrollando al menos hasta los primeros cuatro términos no nulos.

Resolución:

Se asume que la función desconocida puede ser desarrollada alrededor del punto $x = 0$ a través de la fórmula de Taylor.

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \qquad [23]$$

Se toma el punto citado ya que es allí donde se conoce el valor de la función y de su derivada primera.

Es decir que se conocen los dos primeros coeficientes de la serie. Para conocer el resto de los coeficientes es necesario determinar las sucesivas derivadas de y a partir de y'' y evaluarlas en $x = 0$.

Con estos datos se pueden calcular los coeficientes de la serie partiendo de la expresión, única:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad [24]$$

Los resultados se muestran en la Tabla 3

Tabla 3

Derivada	En x	En $x=0$
y''	$=-y\cdot\cos x$	$=-1$
y'''	$=-y'\cdot\cos x+y\cdot\operatorname{sen}x$	$=0$
y^{IV}	$=-y''\cdot\cos x+y'\cdot\operatorname{sen}x+y'\cdot\operatorname{sen}x+y\cdot\cos x$ $=\left(y-y''\right)\cdot\cos x+2y'\cdot\operatorname{sen}x$	$=2$
y^{V}	$=\left(y'-y'''\right)\cdot\cos x-\left(y-y''\right)\cdot\operatorname{sen}x+2y''\cdot\operatorname{sen}x+2y'\cdot\cos x$ $=\left(3y'-y'''\right)\cdot\cos x+\left(3y''-y'\right)\cdot\operatorname{sen}x$	$=0$
y^{VI}	$=\left(3y''-y^{IV}\right)\cdot\cos x-\left(3y'-y'''\right)\cdot\operatorname{sen}x+\left(3y'''-y'\right)\cdot\operatorname{sen}x+\left(3y''-y\right)\cdot\cos x$ $=\left(6y''-y^{IV}-y\right)\cdot\cos x+\left(4y'''-4y'\right)\cdot\operatorname{sen}x$	$=-9$

Se evalúan los coeficientes del desarrollo de Maclaurin, como se muestra en la Tabla 4

Tabla 4

Coeficiente	**Expresión**	**Valor**
a_0	$y(0)/0!$	1
a_1	$y'(0)/1!$	0
a_2	$y''(0)/2!$	$-1/2$
a_3	$y'''(0)/3!$	0
a_4	$y^{IV}(0)/4!$	$1/12$
a_5	$y^{V}(0)/5!$	0
a_6	$y^{VI}(0)/6!$	$-1/80$

Entonces la solución buscada es $y\cong 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{80}x^6$.

4. Solución de EDO empleando Transformadas de Laplace

Este método presenta las siguientes ventajas: a) transforma la ecuación diferencial dada en una ecuación algebraica; b) las condiciones iniciales se incorporan directamente al problema algebraico y c) el uso de tablas de transformadas de Laplace facilita la resolución de los problemas.

4.1. Definición y ejemplos de la transformada de Laplace

Sea $f(t)$ con $t>0$, y s un parámetro, la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como.

$$F(s)=\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad [25]$$

A los efectos de su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales en este curso, s será considerado real.

El símbolo $\mathscr{L}$ se llama operador de la transformada de Laplace. La integral impropia que aparece en la expresión [25] queda definida como

$$\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}e^{-st}f(t)dt \qquad [26]$$

La transformada de Laplace existe si el límite existe, o sea, si la integral converge.

Utilizando la definición [25] se puede calcular las transformadas de Laplace de distintas funciones y tabularlas.

Por ejemplo, para determinar la transformada de Laplace de

$f(t)=1$

se tiene que:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^M = \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-sM}}{s} = \frac{1}{s}\text{; si } s>0 .$$

Del mismo modo, la transformada de Laplace de

$f(t)=e^{at}$

resulta:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}\right)dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^M = \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)M}}{s-a} = \frac{1}{s-a}\text{; si } s>a$$

En particular, se puede calcular por definición la transformada de Laplace de la función $f(t)=y'(t)$, donde $y'(t)=dy/dt$ es la derivada de y respecto de la variable t.

Se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}y'(t)dt$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{\left.e^{-st}y(t)\right|_0^M + s\int_0^M e^{-st}y(t)dt\right\} = \lim_{M\to\infty}\left\{e^{-sMt}y(M) - y(0) + s\int_0^M e^{-st}y(t)dt\right\}$$

$$= -y(0) + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt = -y(0) + sY(s) = sY(s) - y(0)$$

donde se asume que

$y(t)$ es continua en $t=0$

$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s) = Y$

$\lim_{M\to\infty} e^{-sM}y(M) = 0$

También se pueden determinar transformadas de Laplace de derivadas de orden superior.

Por ejemplo sea $f(t)=y''(t)$, donde $y''(t)=d^2y/dt^2$ es la derivada segunda de una función desconocida y respecto de la variable t.

En este caso, se tiene, definiendo una nueva función $g(t)=y'(t)$, de manera que

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} - g(0) = s\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} - y'(0)$$

$$= s\left[sY(s) - y(0)\right] - y'(0) = s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

4.2. Condiciones para la existencia de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace de $f(t)$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, existe y $f(t)$ se vuelve a determinar a partir de su transformada mediante la operación inversa, si $f(t)$ es continua o regular a trozos en el intervalo $[t_1, t_2] \mid t_1 > 0$ y existen las constantes a, M y T tales que $e^{-st}\mid f(t)\mid < M \;\forall\, t > T$.

Las funciones que verifican esta condición se denominan habitualmente funciones de orden exponencial.

4.3. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que tienen transformada de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente; c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Entonces

$$\mathscr{L}\{c_1 f(t)+c_2 g(t)\}=c_1\mathscr{L}\{f(t)\}+c_2\mathscr{L}\{g(t)\}=c_1F(s)+c_2G(s)$$

Propiedad 1 de traslación: Sea $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a).$$

Propiedad 2 de traslación: Sea $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$; sea $g(t)=f(t-a)$ si $t>a$ y $g(t)=0$ para $t<a$, entonces

$$\mathscr{L}\{g(t)\}=e^{-as}F(s).$$

Cambio de escala: Sea $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(at)\}=(1/a)F(s/a)$$

Transformada de la integral: Sea $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=F(s)/s$$

Multiplicaciones por t : Sea $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces

a) $\mathscr{L}\{tf(t)\}=-F'(s)$;

b) $\mathscr{L}\{t^2 f(t)\}=F''(s)$; $\mathscr{L}\{t^3 f(t)\}=-F'''(s)$.

y, en general:

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n\left(d^n F/ds^n\right)$$

4.4. Transformada Inversa de Laplace

Si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es tal que $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces $f(t)$ se llama transformada inversa de Laplace de la función $F(s)$ y se expresa $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, donde el operador $\mathscr{L}^{-1}$ se llama operador transformada inversa de Laplace.

Sea la función $f(t)$ seccionalmente continuas en cada intervalo $0\le t\le N$ y de orden exponencial para $t>N$, entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, o sea $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, es única.

4.5. Propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace

Linealidad: Sean $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ y $\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t)$ las transformadas inversas de Laplace de las funciones $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente. Sean además c_1 y c_2 dos constantes arbitrarias. Entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(t)\}=c_1 f(t)+c_2g(t)$$

Propiedad 1 de traslación: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ entonces

$$e^{at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{at} f(t).$$

Cambio de escala: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s/a)\}=af(at).$$

Multiplicaciones por s: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $f(0^+) = 0$, entonces

$\mathscr{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t)$.

División por s: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)/s\} = \int_0^1 f(u)du$.

Derivadas de $F(s)$: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$.

Integrales de $F(s)$: Sea $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = f(t)/t$.

4.6. Aplicación de las transformadas a la resolución de EDO

El procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales mediante el empleo de transformadas de Laplace se fundamenta en la propiedad que tiene la transformada de Laplace de las derivadas, al convertirlas en funciones algebraicas en las cuales la incógnita es precisamente la transformada de la función desconocida.

Por lo tanto, la transformada inversa de esta última permite conocer el valor de la solución de la ecuación diferencial, que como incorpora las condiciones iniciales, es una solución particular.

4.7. Algunos métodos para hallar las transformadas inversas de Laplace

4.7.a. Uso de Teoremas sobre las transformadas inversas de Laplace

En correspondencia con cada propiedad de las transformadas de Laplace, hay una propiedad de las transformadas inversas de Laplace.

La aplicación de tales propiedades permite deducir el valor de la transformada inversa y, en consecuencia, produce una solución de la EDO.

4.7.b. Método de las fracciones parciales

En los casos en los que se llega a una transformada de la forma $p(s)/q(s)$, donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios, y el grado de $p(s)$ es menor que el de $q(s)$, se puede expresar el resultado como una suma de fracciones más simples, llamadas fracciones parciales.

4.7.c. Método de las convoluciones

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que tienen transformada de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente.

El teorema de la convolución relaciona el producto de las transformadas de Laplace de dos funciones con éstas.

Entonces $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g$, donde $f * g$ se llama convolución de f y g. De manera equivalente se tiene que $\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)\cdot G(s)$.

4.7.d. Uso de Tablas de Transformadas

Para hallar $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, conociendo $F(s)$ sólo se necesita mirar en la tabla de transformadas de Laplace a qué función $f(t)$ corresponde $F(s)$.

En ciertos casos, la transformada inversa no se encuentra directamente en la tabla, pero se puede descomponer $F(s)$ en dos o más funciones que sí se pueden antitransformar utilizándola. La Tabla 5 muestra algunas funciones y sus transformadas de Laplace.

Tabla 5

	Función $f(t)$	Transformada $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$	Obsevaciones
1	1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
3	t^n, con $n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
4	t^n, con $n>-1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	$s>0$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
6	$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
8	$\operatorname{senh}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$
9	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$s>\lvert\omega\rvert$
10	$e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
12	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$s>a$
13	$t\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
14	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
15	$y'(t)$	$sY-y(0)$	$Y=\mathscr{L}\{y(t)\}$
16	$y''(t)$	$s^2Y-sy(0)-y'(0)$	$Y=\mathscr{L}\{y(t)\}$
17	$y^{(n)}(t)$	$s^nY-s^{n-1}y(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0)$	$n=1,2,3,\ldots$; $Y=\mathscr{L}\{y(t)\}$
18	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
19	$t^nf(t)$	$(-1)^nf^{(n)}(s)$	$n=1,2,3,\ldots$
20	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)\cdot G(s)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ $G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}$
21	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$	$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$

Ejemplo 3:

Resolver $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2t}$ con la condición $y(0) = 1$ [27]

Resolución:

Primero se transforma miembro a miembro la ecuación diferencial dada

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{27}\} \qquad [28]$$

se desarrolla [28] resultando:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\ \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s) \\ \mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} \end{aligned}\right\} \qquad [29]$$

y entonces

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2} \qquad [30]$$

Se despeja *Y(s)* y se descompone en fracciones parciales, resultando:

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3} \qquad [31]$$

Para hallar y(t) se procede a determinar la transformada inversa de [25], que es:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \qquad [32]$$

de la cual surge la solución particular buscada:

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$$

Ejemplo 4:

Resolver $x'' + 16x = \cos 4t$ con las condiciones $x(0) = 0\,; x'(0) = 1$ [33]

Resolución:

Transformando la ecuación [27] se tiene

$$(s^2 + 16)\cdot X(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16} \qquad [34]$$

se despeja *X(s)*

$$X(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} \qquad [35]$$

Para hallar *x(t)* se procede a determinar la transformada inversa de [29], que es:

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} \qquad [36]$$

de la cual surge la solución particular buscada: $x(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8} t \operatorname{sen} 4t$

5. Comentario para el final del tema

Los procedimientos alternativos presentados para resolver EDO son analíticos. En el marco de mostrar un panorama más general se debe mencionar que existen infinidades de métodos numéricos que permiten, aplicando distintos criterios y abordajes del tema, obtener soluciones con la aproximación necesaria en cada caso. En ellos se basan las herramientas informáticas para la resolución de EDO.